第一章　集合与点集

§1.1　集　　合

1.1.1　集合的概念与运算

基 本 内 容

(一) 集合概念的描述

把具有某种性质或满足一定条件的所有事物或对象视为一个整体,这一整体就称为**集合**,而这些事物或对象就称为属于该集合的**元素**. 一般地说,集合的符号用英文大写字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$ 等来表示,集合的元素用小写字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 等来表示. 例如:自然数(正整数)全体形成的集合记为 $\mathbf{N}$,有理数全体形成的集合记为 $\mathbf{Q}$,实数全体记为 $\mathbf{R}^1$,整数全体记为 $\mathbf{Z}$.

设 A 是一个集合. a 是 A 的元素记为 $a\in A$,a 不是 A 的元素记为 $a\overline{\in} A$. 为了明确表征一个集合是由哪些元素构成的,它有两种表述方法:

(i) 列举法. 例如集合 E 是由数字 1,2,3,4,5 构成的,记为 $E=\{1,2,3,4,5\}$.

(ii) 描述法. 例如 $E=\{x\in\mathbf{R}^1: x<6\}$ 表示集合 E 是由小于 6 的一切实数构成的.

定义 1　设有集合 A 与 B. 若 $x\in A$,则 $x\in B$. 此时称 A 是 B 的**子集**(合),记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,也称为 A 含于 B 或 B **包含** A. 显然,$A\subset A$. 若 $A\subset B$,且存在 B 的元素不属于 A,则称 A 是 B 的**真子集**.

为了论述与运算的方便,我们还指定一种所谓**空集**,它是不包含任何元素的集合,记为 $\varnothing$. 空集 $\varnothing$ 是任一集合的子集.

定义 2　设 A,B 是两个集合. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B **相等**或**相同**,记为 $A=B$. A 与 B 相等就是 A 与 B 的元素完全相同,即 A 与 B 是同一个集合.

定义 3　设 I 是给定的一个集合,对于每一个 $\alpha\in I$,我们指定一个集合 A_α. 这样我们就得到许多集合,它们的总体称为集合族,记为 $\{A_\alpha: \alpha\in I\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 这里的 I 常称为指标集. 当 $I=\mathbf{N}$ 时,集合族也称为集合列,简记为 $\{A_i\}$ 或 $\{A_k\}$ 等等.

(二) 集合的运算

集合的分解与合成是探讨各集合之间相互关系以及组成新集合的一种有效手段,从而使集合论方法在实变函数论中获得重要的应用. 甚至可以这么说: 实变函数论中的许多命题的解决,关键在于能否将一个集合作出满足要求的具有特定性质的子集合的分解. 一般的分解与合成可以通过各种集合之间的所谓运算来表达.

1. 并与交(集)

定义 4 设 A,B 是两个集合,称集合 $\{x: x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**,记为 $A\cup B$,即由 A 与 B 的全部元素构成的集合.

为直观起见,现用图形来示意集合运算构成的新集合,称为 Venn 图. $A\cup B$ 见图 1.1.

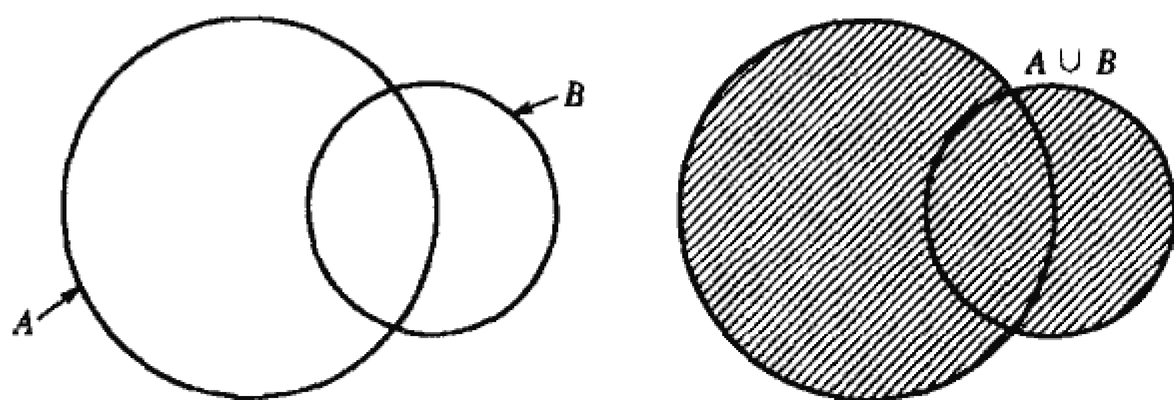


图 1.1

定义 5 设 A,B 是两个集合,称集合 $\{x: x\in A, x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$,即由 A 与 B 的公共元素构成的集合(见图 1.2). 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B **互不相交**.

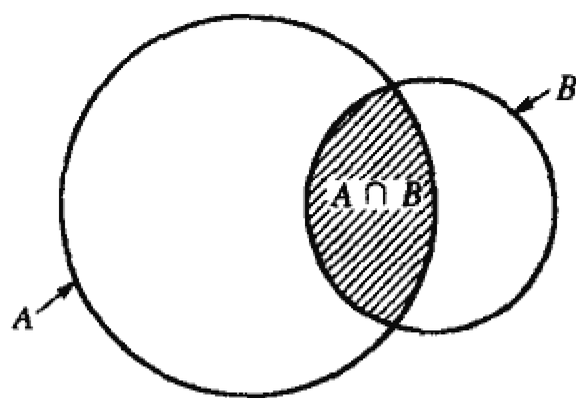


图 1.2

定理 1 设有集合 A,B 与 C,我们有

(i) 交换律:

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$$

(ii) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(iii) 分配律：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

类似地，可以定义多个集合的并集与交集. 设有集合族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，我们定义其并集与交集如下：

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x:\ 存在\ \alpha\in I, x\in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x:\ 对一切\ \alpha\in I, x\in A_\alpha\}.$$

此外，前述之交换律与结合律仍适用于任意多个集合的情形：

(i) $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$;

(ii) $A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

2. 差与补(集)

定义 6 设 A, B 是两个集合，称$\{x:\ x\in A, x\overline{\in} B\}$为 A 与 B 的**差集**，记为$A\backslash B$(读做 A 减 B)，即由在 A 集合中而不在 B 集合中的一切元素构成的集合(见图 1.3).

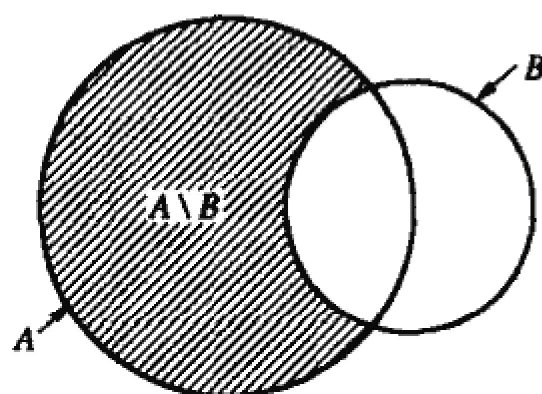


图 1.3

在上述定义中，当 B 是 A 的子集时，称$A\backslash B$为集合 B 相对于 A 的**补集**或**余集**. 通常，在我们讨论问题的范围内，所涉及的集合总是某个给定的“大”集合 X 的子集，我们称 X 为**全集**. 此时，集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集，并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$. 即

$$B^c = X\backslash B.$$

今后，凡没有明显标出全集 X 时，都表示取补集运算的全集 X 预先已知，而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是 B^c 也简记为

$$B^c = \{x \in X:\ x\overline{\in} B\}.$$

显然，我们有下列简单事实：

(i) $A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\varnothing$, $(A^c)^c=A$, $X^c=\varnothing$, $\varnothing^c=X$;

(ii) $A\backslash B=A\cap B^c$;

(iii) 若 $A\supset B$，则 $A^c\subset B^c$；若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^c$.

特别地，我们有下述两个重要法则：

定理 2 (De Morgan 法则)

(i) $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$;　　(ii) $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

定义 7　设 A,B 为两个集合，称集合 $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**，记为 $A\triangle B$. 这是由既属于 A,B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合(见图 1.4).

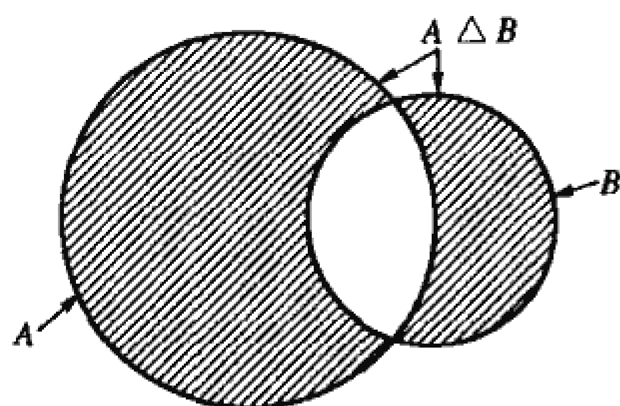


图　1.4

由定义立即可知 $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\triangle B)$. 因此，对称差集是表示并集中除公共元素以外的部分. 显然，我们有下列简单事实：

(i) $A\triangle\varnothing=A, A\triangle A=\varnothing, A\triangle A^c=X, A\triangle X=A^c$;

(ii) 交换律：$A\triangle B=B\triangle A$;

(iii) 结合律：$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$;

(iv) 交与对称差满足分配律：$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$;

(v) $A^c\triangle B^c=A\triangle B$;

(vi) 对任意的集合 A 与 B，存在唯一的集合 E，使得 $E\triangle A=B$，实际上 $E=B\triangle A$.

3. 集合列的极限(集)

定义 8　设 $\{A_k\}$ 是一个集合列. 若

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**. 此时我们称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$；若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**，此时我们称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$.

定义 9　设 $\{A_k\}$ 是一集合列，令

$$B_j=\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k\quad(j=1,2,\cdots),$$

显然有 $B_j\supset B_{j+1}(j=1,2,\cdots)$，我们称

$$\lim_{j\to\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列$\{A_k\}$的**上极限集**，简称为**上限集**，记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地，称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列$\{A_k\}$的**下极限集**，记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k,$$

简称为**下限集**. 若上、下限集相等，则说$\{A_k\}$的极限集存在并等于上限集或下限集，记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

对于上、下限集的运算，易知下述事实成立：

(i) $E\setminus\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$； (ii) $E\setminus\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$；

(iii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \cup \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n$；

(iv) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cap B_n) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \cap \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n$.

定理 3 若$\{A_k\}$为一集合列，则

(i) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \{x$：对任一自然数 j，存在 $k(k\geqslant j)$，$x\in A_k\}$；

(ii) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \{x$：存在自然数 j_0，当 $k\geqslant j_0$ 时，$x\in A_k\}$.

这就是说，$\{A_k\}$的上限集是由属于$\{A_k\}$中无穷多个集合的元素所形成的；$\{A_k\}$的下限集是由只不属于$\{A_k\}$中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

4. 集合的直积

定义 10 设 X,Y 是两个集合，称一切有序"元素对"(x,y)(其中$x\in X,y\in Y$)形成的集合为 X 与 Y 的**直积集**，记为 $X\times Y$：

$$X\times Y = \{(x,y): x\in X, y\in Y\},$$

其中$(x,y)=(x',y')$是指 $x=x'$，$y=y'$，$X\times X$ 也记为 X^2.

典型例题精解

例 1 解答下列问题：

(1) 给定集合 A,B,C，试给出由下述指定元素全体形成的集合的表示式.

(i) 至少属于三者之中的两个集合的元素.

(ii) 属于三者之中的两个而不属于三个集合的元素.

(iii) 属于三者之中的一个而不属另外两个集合的元素.

(2) 设 r,s,t 是三个互不相同的复数,且令

$$A=\{r,s,t\},\quad B=\{r^2,s^2,t^2\},\quad C=\{rs,st,rt\}.$$

若有 $A=B=C$,试求 r,s,t.

解 (1) (i) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$表示属于 A,B 与 C 中至少两个集合中的元素全体形成的集合.

(ii) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\triangle B\triangle C)$表示属于 A,B 与 C 中至少两个集合但不属于三个集合的元素全体形成的集合.

(iii) $(A\triangle B\triangle C)\setminus(A\cap B\cap C)$表示属于 A,B 与 C 中的一个集合但不属于另外两个集合的元素全体形成的集合.

(2) 因为集合相等就是其元素相同,所以将每个集合中的全部元素作数值和,所得到的三个数应该相等,若令其和为 K,则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+rt=K.$$

从而得到

$$\begin{aligned}K^2&=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+rt)\\&=3K,\end{aligned}$$

即 $K=3$ 或 0. 又从数值的乘积看,同理有

$$rst=r^2s^2t^2,$$

故知 $rst=1$. 于是在 $K=3$ 时,可知 r,s,t 为方程

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

的根,亦即$(x-1)^3=0$ 之根. 但此时有 $r=s=t=1$,不合题意. 这说明 $K=0$,此时 r,s,t 为方程

$$x^3-1=0$$

的根,即 $x=1$ 以及 $x=(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})/2$.

例 2 试证明下列命题:

(1) 设 A,B 是全集 X 中的子集.

(i) 等式 $B=(X\cap A)^c\cap(X^c\cup A)$成立当且仅当 $B^c=X$.

(ii) 若对任意的 $E\subset X$,有 $E\cap A=E\cup B$,则 $A=X,B=\varnothing$.

(2) 设 Γ 是集合 X 中某些非空子集合形成的集合族. 若 Γ 对运算 $\triangle,\cap$ 是封闭的(即若 $A,B\in\Gamma$,则 $A\triangle B\in\Gamma,A\cap B\in\Gamma$,也说 Γ 是一个

环)，则Γ对运算$\cup$，$\setminus$也封闭.

(3) 设有集合A,B,E,F.

(i) 若$A\cup B=F\cup E$，且$A\cap F=\varnothing$，$B\cap E=\varnothing$，则$A=E$且$B=F$.

(ii) 若$A\cup B=F\cup E$，令$A_1=A\cap E$，$A_2=A\cap F$，则$A_1\cup A_2=A$.

(4) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$.

证明 (1) (i) 注意等式

$$X^c=(X\cap(A\cup A^c))^c=((X\cap A)\cup(X\cap A^c))^c$$
$$=(X\cap A)^c\cap(X^c\cup A).$$

(ii) 取$E=X$，则由题设知$A=X$；又取$E=A^c$，则由题设知$\varnothing=A^c\cap A=A^c\cup B=\varnothing\cup B$，即$B=\varnothing$.

(2) 注意等式

$$A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B),\quad A\setminus B=(A\triangle B)\cap A.$$

(3) (i) 由于$A\cap F=\varnothing$，故从$A\cup B=F\cup E$可知，$A\subset E$且$E\subset A$，即$A=E$. 同理可得$B=F$.

(ii) 我们有

$$A_1\cup A_2=(A\cap E)\cup(A\cap F)=A\cap(E\cup F)$$
$$=A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)=A.$$

(4) 应用集合运算性质，我们得到

$$\begin{aligned}
&(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)\\
&\quad=(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)^c\\
&\quad=(A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)\\
&\quad=A^c\cap(A\cup B\cup C)\cup(A\cup B\cup C)\cap B^c\\
&\qquad\cup(A\cup B\cup C)\cap C^c\\
&\quad=(A^c\cap B)\cup(A^c\cap C)\cup(A\cap B^c)\cup(C\cap B^c)\\
&\qquad\cup(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)\\
&\quad=[(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)]\cup[(A^c\cap C)\cup(A\cap C^c)]\\
&\qquad\cup[(C\cap B^c)\cup(B\cap C^c)]\\
&\quad=[(B\setminus A)\cup(A\setminus B)]\cup[(C\setminus A)\cup(A\setminus C)]\\
&\qquad\cup[(C\setminus B)\cup(B\setminus C)]\\
&\quad=(A\triangle B)\cup(A\triangle C)\cup(B\triangle C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C).
\end{aligned}$$

（见§2.2例2之(2)中的证明）

例3 解答下列问题：

(1) 设$f(x)$,$g(x)$是定义在$\mathbf{R}^1$上的非负实值函数，令

$$E_f=\{(x,y):x\in\mathbf{R}^1,0\leqslant y\leqslant f(x)\},$$
$$E_g=\{(x,y):x\in\mathbf{R}^1,0\leqslant y\leqslant g(x)\},$$

试作函数$\varphi(x)$,$\psi(x)$，使得

$$E_\varphi=E_f\cup E_g,\quad E_\psi=E_f\cap E_g.$$

(2) 记$E_\alpha=\{(x,y):0<x<\infty,y=x^{-\alpha}\}$，试求集合$\bigcap\limits_{\alpha\geqslant1}E_\alpha$，$\bigcup\limits_{\alpha\geqslant1}E_\alpha$的表达式.

解 (1) 略.

(2) $\bigcap\limits_{\alpha\geqslant1}E_\alpha$是平面上点$(1,1)$，而

$$\bigcup_{\alpha\geqslant1}E_\alpha=\{(x,y):0<x<1,y\geqslant x^{-1}\}\cup(1,1)$$
$$\cup\{(x,y):1<x<\infty,0<y\leqslant x^{-1}\}.$$

例4 试证明下列命题：

(1) 设有集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$，其中$a_i(1\leqslant i\leqslant10)$是一个两位数，则存在分解$A=B\cup C$满足：$B\cap C=\varnothing$，使得$B$中所有元素的数值和与$C$中所有元素的数值和相等.

(2) 设E是由n个元素形成的集合.$E_1,E_2,\cdots,E_{n+1}$是E的非空子集，则存在r,s个不同指标：

$$i_1,i_2,\cdots,i_r;\quad j_1,j_2,\cdots,j_s,$$

使得$E_{i_1}\cup\cdots\cup E_{i_r}=E_{j_1}\cup\cdots\cup E_{j_s}$.

(3) 设E是由某些有理数形成的集合，且满足

(i) 若$a\in E,b\in E$，则$a+b\in E,ab\in E$；

(ii) 对任一有理数r，恰有下述关系之一成立：

$$r\in E,\quad -r\in E,\quad r=0,$$

则E是全体正有理数形成的数集.

证明 (1) 作A的一切子集，易知它们共有$2^{10}=1024$个.因为每个子集的全部元素之数值和必小于$10\times100=1000$，所以必有两个子集其元素之数值和相同.从而再将其中公共元素舍去后，分别记为B,

C,即得所证.

(2) 从 $E_1,E_2,\cdots,E_{n+1}$ 中任取若干个作其并集,易知可作出 $2^{n+1}-1$ 个并集. 注意到 E 中仅有 2^n-1 个非空子集,故这些并集不可能全不相同. 因此,从其中取两个相同的并集且舍去其中全同的 E_k.

(3) 若 $r\neq 0$,则由(ii)可知 $r\in E$ 或 $-r\in E$. 因为 $r^2=(-r)^2$,所以 $r^2\in E$,特别有 $1\in E$. 从而根据(i),每个正整数都属于 E.

若 m,n 是正整数,则根据上述推理又知,$1/n^2\in E$. 从而可知 $m/n=mn\times(1/n^2)\in E$. 证毕.

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, $B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$,则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

(2) 设 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, $B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots\supset\cdots$,则

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n).$$

(3) 设 $E_n=\{(x,y):\sqrt{x^2+(y-n)^2}<n\}$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\{(x,y):x\in\mathbf{R}^1,y>0\}.$$

(4) 设 $0<a<b$,则对任意的正整数 k,存在实数 λ,使得

$$\bigcup_{n=k}^{\infty}[na,nb]\supset[\lambda,\infty).$$

(5) 设 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$,$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$,且对 A 的任一无限子集 B,均存在某个 E_i,使得 $E_i\cap B$ 为无限集,则 A 必含于某个 E_{k_0} 中.

证明 (1) 若 x 属于左端,则存在 n_1,n_2,使得 $x\in A_{n_1}\cap B_{n_2}$. 不妨设 $n_1\leqslant n_2$,则由 $A_{n_1}\subset A_{n_2}$ 可知,$x\in A_{n_2}\cap B_{n_2}$. 因此 x 属于右端. 若 x 属于右端,则存在 n_0,使得 $x\in A_{n_0}\cap B_{n_0}$. 由此知 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$,$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$,即 x 属于左端.

(2) 略.

(3) 对任意的点 (x,y)(其中 $x\in\mathbf{R}^1,y>0$),只要 $n>(x^2+y^2)/2y$,

就有 $x^2+(y-n)^2<n^2$.

(4) 取正整数 N,使得 $N\geqslant k$ 且 $N\geqslant a/(b-a)$. 显然,若 $n\geqslant N$,则 $n(b-a)\geqslant a, nb\geqslant(n+1)a$. 由此可知

$$[na,nb]\cap[(n+1)a,(n+1)b]\neq\varnothing.$$

这说明 $\bigcup_{n=k}^{\infty}[na,nb]\supset[Na,\infty)$.

(5) 反证法. 假定任一 E_k 均不包含 A,则有

$$a_k\in A\backslash E_k\quad(k=1,2,\cdots).$$

易知 $B_0=\{a_k\}$ 是无限集,这是因为若有 $B_0=\{b_1,\cdots,b_n\}$,则由 $B_0\subset A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 可知,必有 $b_1\in E_{k_1},\cdots,b_n\in E_{k_n}$. 令 $k_0=\max\{k_1,\cdots,k_n\}$,则得 $B_0\subset E_{k_0}$. 但 $a_{k_0}\in A\backslash E_{k_0}$,这一矛盾说明 B_0 是无限集. 根据 $a_k\in A\backslash E_k(k\in\mathbf{N})$,有

$$a_{k+1}\in A\backslash E_{k+1}\subset A\backslash E_k,\cdots,a_{k+j}\in A\backslash E_k\quad(j\in\mathbf{N}).$$

从而每个 E_k 均与 B 之交为有限集,矛盾. 证毕.

例 6 求下列集合列 $\{E_n\}$ 的上、下限集:

(1) $E_{3n-2}=A,E_{3n-1}=B,E_{3n}=C(n=1,2,\cdots)$.

(2) $E_n=\{m/n: m\in\mathbf{Z}\}(n=1,2,\cdots)$.

(3) $E_n=(0,1/n)(n\in\mathbf{N})$.

(4) $E_n=(1/n,1+1/n)(n\in\mathbf{N})$.

(5) $E_1=[0,1/2],E_2=[0,1/2^2]\cup[2/2^2,3/2^2]$,

$E_3=[0,1/2^3]\cup[2/2^3,3/2^3]\cup[4/2^3,5/2^3]\cup[6/2^3,7/2^3]$,

……………………

$E_n=[0,1/2^n]\cup[2/2^n,3/2^n]\cup\cdots\cup[(2^n-2)/2^n,(2^n-1)/2^n]$.

……………………

解 (1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n=A\cup B\cup C$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n=A\cap B\cap C$.

(2) $\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n=\mathbf{Q}$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n=\mathbf{Z}$.

(3) $\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n=\varnothing$. (4) $\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n=(0,1]$.

(5) $\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n=[0,1)$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n=\{m/2^k\}(k,m\geqslant0)$.

例 7 试证明下列命题：

(1) 设 $f_n(x)(n \in \mathbf{N})$ 以及 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数，且有 $f_n(x) \to f(x)(n \to \infty, x \in \mathbf{R}^1)$，则

(i) $\{x \in \mathbf{R}^1: f(x) \leqslant t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in \mathbf{R}^1: f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right\}$ $(t \in \mathbf{R}^1)$.

(ii) $\{x \in \mathbf{R}^1: f(x) < 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^1: f_n(x) \leqslant 1 - 1/k\}$.

(2) 设 $a_n \to a(n \to \infty)$，则 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k}\right) = \{a\}$.

(3) 设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数，则使 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的一切点 x 所形成的集合 D 可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left(x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right).$$

(4) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数列，令

$$E_{n,m}^k = \{x \in \mathbf{R}^1: |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant 1/k\} \quad (k \in \mathbf{N}),$$

$\{f_n(x)\}$ 的收敛点集是 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} E_{n,m}^k$.

证明 应用上、下限集的思想.

(1) (i) 记 $E_{n,k} = \{x \in \mathbf{R}^1: f_n(x) < t + 1/k\}$. 若 x_0 属于左端，即 $\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0) \leqslant t$，故对任意的 $k_0 \in \mathbf{N}$，存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $f_n(x_0) < t + 1/k_0$，即 $x_0 \in E_{n,k_0}(n \geqslant n_0)$. 这说明 x_0 属于 $\{E_{n,k_0}\}$ 的下限集，故 x_0 属于右端；若 x_0 属于右端，则对任意给定的 $k_0 \in \mathbf{N}$，$x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k_0}$，即 x_0 属于 $\{E_{n,k_0}\}$ 的下限集. 故存在 n_0，$x_0 \in E_{n,k_0}(n \geqslant n_0)$. 即 $f_n(x_0) < t + 1/k_0(n \geqslant n_0)$. 令 $n \to \infty$，可知 $f(x_0) \leqslant t + 1/k_0$. 再令 $k_0 \to \infty$，即得 $f(x_0) \leqslant t$，x_0 属于左端.

(ii) 记 $E_{n,k} = \{x \in \mathbf{R}^1: f_n(x) \leqslant 1 - 1/k\}$. 若 x_0 属于左端，即 $f(x_0) < 1$，易知存在 $k_0 \in \mathbf{N}$，使得 $f(x_0) < 1 - 1/k_0$. 从而由题设知，存在 n_0，使得 $f_n(x_0) < 1 - 1/k_0(n \geqslant n_0)$. 这说明 x_0 属于 $\{E_{n,k_0}\}$ 的下限集，

即 $x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k_0}$. 由此又知 x_0 属于右端；若 x_0 属于右端，则存在 $k_0 \in \mathbf{N}$，$x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k_0}$，即存在 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$x_0 \in E_{n,k_0}, \quad f_n(x_0) \leqslant 1 - 1/k_0.$$

令 $n \to \infty$，即得 $f(x_0) \leqslant 1 - 1/k_0 < 1$，$x_0$ 属于左端.

(2) 注意下述推理的充分必要性：

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow$ 对任意的 $k_0 \in \mathbf{N}$，存在 n_0，使得 $a \in (a_n - 1/k_0, a_n + 1/k_0)(n \geqslant n_0)$，即

$$a \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (a_n - 1/k_0, a_n + 1/k_0)$$

$$\Longleftrightarrow a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (a_n - 1/k, a_n + 1/k).$$

(3) 这个集合表示式初看起来有点“不知从何说起”，因而我们来谈谈它的构思，详细证明留给读者. 大家知道，若 $f_n(x)$ 在点 x_0 不收敛到 $f(x_0)$，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任给自然数 k，必有 $n \geqslant k$，使得

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0.$$

也就是说，若令

$$E_n(\varepsilon_0) = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\},$$

则点 x_0 是属于 $\{E_n(\varepsilon_0)\}$ 中之无穷多个集合的，即是 x_0 含于 $\{E_n(\varepsilon_0)\}$ 的上限集内. 反之，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，$\{E_n(\varepsilon)\}$ 的上限集中的点都是不收敛点. 总之，这些上限集在对 ε 求并集后可构成全体不收敛点. 最后，上述之 ε 又可由一列 $\{\varepsilon_k\}$：$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots \to 0$ 来代替. 特别当取 $\varepsilon_k = 1/k$ 时，就得到 D 的表示式.

(4) 注意，收敛列就是 Cauchy 列.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数列，则

(i) $\{x \in \mathbf{R}^1: \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) > a\} = \bigcup\limits_{\beta > a} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^1: f_n(x) \geqslant \beta\}$；

(ii) $\{x \in \mathbf{R}^1: \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) > 0\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^1: f_n(x) > 1/k\}$.

(2) 设$\{f_n(x)\}$是定义在$[a,b]$上的函数列，$E\subset[a,b]$且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\chi_{[a,b]\setminus E}(x),\quad x\in[a,b].$$

若令$E_n=\left\{x\in[a,b]:\ f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}$，则$\varliminf_{n\to\infty}E_n=[a,b]\setminus E$.

证明 (1) (i) 记$E_{n,\beta}=\{x\in\mathbf{R}^1:\ f_n(x)\geqslant\beta\}$. 若$x_0$属于左端，即$\varliminf_{n\to\infty}f_n(x_0)>\alpha$，则存在$\beta:\ \beta>\alpha$，以及$n_0$，使得$f_n(x_0)\geqslant\beta(n\geqslant n_0)$，即$x_0\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{n,\beta}$，$x_0$属于右端；若$x_0$属于右端，即存在$\beta:\ \beta>\alpha$，使得$x_0\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{n,\beta}$. 这说明存在$n_0$，$x_0\in E_{n,\beta}(n\geqslant n_0)$，即$f_n(x_0)\geqslant\beta(n\geqslant n_0)$. 从而有$\varliminf_{n\to\infty}f_n(x_0)\geqslant\beta>\alpha$，$x_0$属于左端.

(ii) 若x_0属于右端，则存在$k_0\in\mathbf{N}$，使得x_0属于$\{E_{n,k_0}\}$中的无穷多个($E_{n,k_0}=\{x\in\mathbf{R}^1:\ f_n(x)>1/k_0\}$)，即存在$\{n_j\}$，使得$f_{n_j}(x_0)>1/k_0$，故$\varlimsup_{n\to\infty}f_n(x_0)\geqslant1/k_0>0$. 反向证略.

(2) 由题设知存在极限

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b]\setminus E,\\ 0, & x\in E.\end{cases}$$

因此，我们有

$$\varlimsup_{n\to\infty}E_n=[a,b]\setminus E,\quad \varliminf_{n\to\infty}E_n=[a,b]\setminus E.$$

即得所证.

1.1.2 集合间的映射、集合的基数

基 本 内 容

(一) 集合间的映射

定义 1 设X,Y为两个非空集合. 若对每个$x\in X$，均存在唯一的$y\in Y$与之对应，则称这个对应为**映射**(**变换或函数**). 若用f表示这种对应，则记为

$$f:\ X\to Y,$$

并称f是从X到Y的一个映射. 此时，$x\in X$在Y中的对应元y称为x在映射f下的(映)**像**，x称为y的一个**原像**，我们记为$y=f(x)$；若对每一个$y\in Y$，均有$x\in X$，使得$y=f(x)$，则称此f为从X到Y的**满映射**，或称f为从X到Y上的映

射.

对于 $f: X\to Y$ 以及 $A\subset X$,我们记

$$f(A)=\{y\in Y: x\in A, y=f(x)\},$$

并称 $f(A)$为集合 A 在映射 f 下的(映)**像集**($f(\varnothing)=\varnothing$). 显然,我们有下列简单事实:

(i) $f\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$; (ii) $f\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcap_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

对于 $f: X\to Y$ 以及 $B\subset Y$,我们记

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\},$$

并称 $f^{-1}(B)$为 B 关于 f 的**原像集**. 显然,我们有下列简单事实:

(i) 若 $B_1\subset B_2$,则 $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$. (ii) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$.

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$. (iv) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$.

定义 2 设 $f: X\to Y$. 若当 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$ 时,有

$$f(x_1)\neq f(x_2),$$

即 X 中不同元有不同的像时,则称 f 是从 X 到 Y 的一个**单射**. 若 f 既是单射又是满映射,则称 f 为 X 到 Y 上的**一一映射**. 在 f 是 X 到 Y 上的一一映射的情况下,对 Y 中的每一个元 y,就有 X 中的唯一元 x,使得 $y=f(x)$. 从而我们又可作 Y 到 X 上的映射

$$g: Y\to X,\quad g(y)=x,$$

其中 x 由关系 $y=f(x)$确定,并称 g 为 f 的**逆映射**,记为 f^{-1}. 于是,当 f 为 X 到 Y 上的一一映射时,我们就说在 X 与 Y 之间存在**一一对应**.(若 $f: X\to Y$ 是单射,则 f 是 X 到 $f(X)$的一一映射.)

定义 3 设 $f: X\to Y, g: Y\to W$,则由

$$h(x)=g[f(x)]\quad (x\in X)$$

定义的 $h: X\to W$ 称为 g 与 f 的**复合映射**.

集合之间的映射不仅其本身具有实际的意义,而且是研究集合结构与性质的有效手段. 当 Y 是 $\mathbf{R}^1$ 时,$f: X\to Y$ 一般称为函数. 特别,对于 X 中的子集 A,我们作

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in X\setminus A,\end{cases}$$

且称 $\chi_A: X\to\mathbf{R}^1$ 是定义在 X 上的 A 的**特征函数**.

由此可以看出,特征函数 χ_A 在一定意义上可作为 A 本身的代表. 从而可以通过对它的研究来了解集合本身,例如 $A\neq B$ 就是 $\chi_A\neq\chi_B$,而 $A\subset B$ 与 $\chi_A(x)\leqslant$

$\chi_B(x)$是等价的等等. 显然,我们有下列简单事实:

(i) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$.　　(ii) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$.

(iii) $\chi_{A\setminus B}(x)=\chi_A(x)[1-\chi_B(x)]$.　　(iv) $\chi_{A\Delta B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$.

定义 4　设 X 是一个非空集合,由 X 的一切子集(包括$\varnothing$,X 自身)为元素形成的集合称为 X 的**幂集**,记为 $\mathscr{P}(X)$.

显然,下列等式成立:

(i) $\mathscr{P}(X)\cap\mathscr{P}(Y)=\mathscr{P}(X\cap Y)$.　　(ii) $\mathscr{P}(X)\cup\mathscr{P}(Y)\subset\mathscr{P}(X\cup Y)$.

(二) 集合的基数

定义 5　设有集合 A 与 B. 若存在一个从 A 到 B 上的一一映射,则称集合 A 与 B **对等**(也就是说可以把 A 与 B 的全部元素通过映射一一对应起来),记为 $A\sim B$.

显然,对等关系有如下的基本性质:

(i) $A\sim A$.　　(ii) 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$.

(iii) 若 $A\sim B$,$B\sim C$,则 $A\sim C$.

引理 (集合在映射下的分解)　若有 $f: X\to Y$,$g: Y\to X$,则存在分解

$$X = A\cup A^{\sim},\quad Y = B\cup B^{\sim},$$

其中 $f(A)=B$,$g(B^{\sim})=A^{\sim}$,$A\cap A^{\sim}=\varnothing$以及 $B\cap B^{\sim}=\varnothing$.

定理 1 (Cantor-Bernstein 定理)　若集合 X 与 Y 的某个真子集对等,Y 与 X 的某个真子集对等,则 $X\sim Y$.

现在让我们来描述集合的**基数**(**或势**)的概念. 设 A,B 是两个集合,如果 $A\sim B$,那么我们就说 A 与 B 的基数(Cardinal number)或势是相同的,记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 从而可见,凡是互相对等的一切集合均具有**相同的基数**,如果用 α 表示这一相同的基数,那么 $\overline{\overline{A}}=\alpha$ 就表示 A 属于这一对等集合族. 对于两个集合 A 与 B,记 $\overline{\overline{A}}=\alpha$,$\overline{\overline{B}}=\beta$. 若 A 与 B 的一个子集对等,则称 α 不大于 β,记为

$$\alpha\leqslant\beta.$$

若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$,则称 α 小于 β(或 β 大于 α),记为

$$\alpha<\beta\quad(\text{或 }\beta>\alpha).$$

显然,若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\beta\leqslant\alpha$,则由 Cantor-Bernstein 定理可知 $\alpha=\beta$.

自然数集 N 的基数 · 可列集

记自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数为 $\aleph_0$($\aleph$读作阿列夫(Aleph,希伯莱文). 若集合 A 的基数为 $\aleph_0$,则 A 叫做**可列集**,这是由于 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$,而 $A\sim\mathbf{N}$,故可将 A 中元素按一一对应关系以自然数次序排列起来,附以下标,就有

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

定理 2 任一无限集 E 必包含一个可列子集.

定理 3 若 $A_n(n=1,2,\cdots)$为可列集,则并集 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是可列集.

有限集与可列集统称为可数集或至多可列集.

定理 4 设 A 是无限集且其基数为 α. 若 B 是至多可列集,则 $A\cup B$ 的基数仍为 α.

定理 5 集合 A 为无限集的充分且必要条件是: A 与某真子集对等.

$\mathbf{R}^1$ 的基数、不可数集

定理 6 $[0,1]=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$不是可数集.

我们称$(0,1]$的基数为**连续基数**,记为 c(或$\aleph_1$).

定理 7 设有集合列$\{A_k\}$. 若每个 A_k 的基数都是连续基数,则其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 的基数是连续基数.

注意,通过映射 $f(x)=(x+1)/2$,可知$[-1,1]$与$[0,1]$对等.

定理 8(无最大基数定理) 若 A 是非空集合,则 A 与其幂集 $\mathscr{P}(A)$(由 A 的一切子集所构成的集合族)不对等.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([0,1])$,则不存在如下之集合分解:

$$[0,1]=A\cup B,\ A\cap B=\varnothing,\ f(A)\subset B,\ f(B)\subset A.$$

(2) $f: X\to Y, g: Y\to X$. 若对任意的 $x\in X$,均有 $g[f(x)]=x$,则 f 是单射,g 是满射.

(3) 设 $f: X\to Y$. 则对任意的 $B\subset Y$,均有 $f[f^{-1}(B)]=B$ 的充分必要条件是: $Y=f(X)$(满射).

(4) 设 $f: X\to Y$ 是满射,则下列条件等价:

(i) f 是一一映射;

(ii) 对任意的 $E_1,E_2\subset X$,均有 $f(E_1\cap E_2)=f(E_1)\cap f(E_2)$;

(iii) 对任意的 $E_1,E_2\subset X, E_1\cap E_2=\varnothing$,均有 $f(E_1)\cap f(E_2)=\varnothing$;

(iv) 对任意的 $E_1\subset E_2\subset X$,均有 $f(E_2\setminus E_1)=f(E_2)\setminus f(E_1)$.

证明 (1) 依题设易知 $A\neq\varnothing, B\neq\varnothing$,且方程 $f(x)=x$ 是无解的(否则,若 $x\in A$,则又有$x=f(x)\in B$;若 $x\in B$,则又有$x=f(x)\in A$. 这均导致矛盾). 从而知 $f(x)>x$ 或 $f(x)<x$: 在前者则与 $f(1)\leqslant 1$ 矛

盾；在后者则与 $f(0)\geqslant 0$ 矛盾. 证毕.

(2) 对任意的 $x\in X$，有 $g[f(x)]=x$. 即存在 $y=f(x)\in Y$，使得 $g(y)=x$. 这说明 g 是满射. 此外，若有 $x_1,x_2\in X$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则由 $x_1=g[f(x_1)]=g[f(x_2)]=x_2$ 可知，f 是单射.

(3) 必要性. 假定对任意的 $B\subset Y$，均有 $f[f^{-1}(B)]=B$，则取 $B=Y$，我们有 $f[f^{-1}(Y)]=Y$，即 f 是满射.

充分性. 假定 $Y=f(X)$. 若存在 $B_0\subset Y$，使得 $f[f^{-1}(B_0)]\neq B_0$. 则存在 $y_0\in B_0$，使得对任意的 $x\in X$，均有 $f(x)\neq y_0$. 这说明 f 不是满射，矛盾. 证毕.

(4) (i)⇒(ii). 只需指出 $f(E_1\cap E_2)\supset f(E_1)\cap f(E_2)$：假定 $y\in f(E_1)\cap f(E_2)$，即存在 $x_1\in E_1,x_2\in E_2$，使得 $f(x_1)=y=f(x_2)$. 由于 f 是一一映射，故有 $x=x_1=x_2\in E_1\cap E_2$，且有 $f(x)=y$. 即 $y\in f(E_1\cap E_2)$.

(ii)⇒(iii). 由 $E_1\cap E_2=\varnothing$ 可知，$f(E_1\cap E_2)=\varnothing$. 证毕.

(iii)⇒(iv). 因为 $E_1\cap(E_2\setminus E_1)=\varnothing$，所以根据(iii)可知，$f(E_1)\cap f(E_2\setminus E_1)=\varnothing$. 这说明 $f(E_2\setminus E_1)=f(E_2)\setminus f(E_1)$.

(iv)⇒(i). 反证法：若有 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=y\in Y$，则令 $E_1=\{x_1\},E_2=\{x_1,x_2\}$，由(iv)知 $y=f(x_2)\in f(E_2\setminus E_1)=f(E_2)\setminus f(E_1)=\varnothing$. 这一矛盾说明 f 是一一映射.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $A_1\subset A_2,B_1\subset B_2$，且 $f: A_1\to B_1, g: A_2\to B_2$ 均为一一映射，则 $A_2\setminus A_1$ 与 $B_2\setminus B_1$ 之间不一定存在一一映射.

(2) 设 $f: X\to X$，且令 $f_1(x)=f(x),f_2(x)=f[f(x)],\cdots,f_n(x)=f[f_{n-1}(x)],\cdots$. 若存在 n_0，使得 $f_{n_0}(x)=x$，则 f 是一一映射.

(3) 设 $I=(0,1],a\in(0,1)$，且定义

$$f(x)=\begin{cases}x+(1-a), & 0<x\leqslant a,\\ x-a, & a<x\leqslant 1,\end{cases}$$

又对任意的区间 $J\subset I$，记

$$f^{(1)}(J)=J,\quad f^{(2)}(J)=f[f(J)],\quad \cdots,$$
$$f^{(n)}(J)=f[f^{(n-1)}(J)],\quad \cdots.$$

则存在 n_0，使得 $f^{(n_0)}(J)\cap J\neq\varnothing$.

证明 (1) 举例如下：

$$A_1 = \{2,3,4,\cdots\}, \quad B_1 = \{3,4,5,\cdots\}, \quad A_2 = B_2 = \mathbf{N},$$

则 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$，但 $A_2 \setminus A_1 = \{1\}, B_2 \setminus B_1 = \{1,2\}$.

(2) 若 $x_1, x_2 \in X$，使得 $f(x_1) = f(x_2) = y \in Y$，则

$$f_{n_0-1}[f(x_1)] = f_{n_0-1}(y) = f_{n_0-1}[f(x_2)],$$

即 $f_{n_0}(x_1) = f_{n_0}(x_2)$. 从而知 $x_1 = x_2$，即 f 是一一映射.

(3) 反证法. 假定存在区间 $J_0 \subset I$，使得对任意的 n，均有 $f^{(n)}(J_0) \cap J_0 = \varnothing$，则有

$$f^{(m+n)}(J_0) \cap f^{(m)}(J_0) = f^{(m)}[f^{(n)}(J_0) \cap J_0] = f^{(m)}(\varnothing) = \varnothing.$$

因此集合列 $\{f^{(n)}(J_0)\}$ 均互不相交. 另一方面，若记 J_0 的长度为 d，则 $f^{(n)}(J_0)$ 是长为 d 的一些区间之并集且含于 I. 这又说明 $\{f^{(n)}(J_0)\}$ 不可能互不相交，矛盾，即得所证.

例 3 试证明下列命题：

(1) $(-1,1) \sim \mathbf{R}^1$； (2) $[-1,1] \sim \mathbf{R}^1$； (3) $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$.

证明 (1) $f(x) = x/(1-x^2)$ 是 $(-1,1)$ 与 $\mathbf{R}^1$ 之间的一一映射.

(2) 由(1)以及 $(-1,1) \subset [-1,1] \subset \mathbf{R}^1$，故根据 Cantor-Bernstein 定理即得所证.

(3) 例如存在一一映射 f：

$$f(i,j) = 2^{i-1}(2j-1), \quad (i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}.$$

这是因为任一自然数均可唯一地表示为：

$$n = 2^p \cdot q \quad (p \text{ 非负整数}, q \text{ 正奇数}),$$

而对非负整数 p，正奇数 q，又有唯一的 $i, j \in \mathbf{N}$ 使得

$$p = i - 1, \quad q = 2j - 1.$$

例 4 试证明下列命题：

(1) 设 $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant 1\}$（$D$ 是平面上的单位圆盘），则不存在如下的集合分解：

$$D = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing, \quad A \text{ 与 } B \text{ 可合同}.$$

（合同是指经平移与旋转后可使两点集合相同.）

(2) X 是无限集，且 $f: X \to X$，则存在 $E \subset X$ 且有 $E \neq \varnothing, E \neq X$，使得 $f(E) \subset E$.

(3)（单调映射的不动点） 设 X 是一个非空集合，且有 $f: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$. 若对 $\mathscr{P}(X)$ 中满足 $A \subset B$ 的任意 A, B，必有 $f(A) \subset f(B)$，则存在 $T \subset \mathscr{P}(X)$，使得 $f(T) = T$.

(4) 试证明不存在如下之集合族 Γ：对任一集合 E，有 Γ 中的元 A，使得 $A \sim E$.

证明 (1) 反证法. 假定分解存在，不妨设原点 $O \in A$，且在 B 中的对应点为 O^*，又记 r, s 为 D 中与 OO^* 垂直的直径的两个端点. 因为对任一点 $a \in A$，其绝对值（即点 a 与点 O 的距离）$|a| \leqslant 1$，所以对任一点 $b \in B$，均有 $|O^* - b| \leqslant 1$（合同变换保距）. 显然有

$$|O^* - r| = |O^* - s| > 1,$$

这说明 $r, s \in A$. 而 $|r^* - s^*| = |r - s| = 2$，故 r^*, s^* 是 D 的另一条直径的端点. 又由于 $|O^* - r^*| = |O - r| = 1$，故知 O^* 必是该直径的中心. 从而有 $O = O^*$，但这与 $A \cap B = \varnothing$ 矛盾. 证毕.

(2) 对任意的 $a \in X$，由 $f(a) \in X$ 可知，$f_2(a) = f[f(a)] \in X$. 从而得 X 中一列元：$a, f(a), f_2(a), \cdots, f_n(a), \cdots$.

(i) 若对任意的 n，$f_n(a) \neq a$，则令

$$A = \{f(a), f_2(a), \cdots, f_n(a), \cdots\},$$

显然 $A \neq \varnothing$，$A \subset X \setminus \{a\}$. 即 $A \neq X$，且有

$$f(A) = \{f_2(a), f_3(a), \cdots, f_{n+1}(a), \cdots\} \subset A.$$

(ii) 若存在 n_0，使得 $f_{n_0}(a) = a$，则令

$$A = \{a, f(a), f_2(a), \cdots, f_{n-1}(a)\},$$

显然 $A \neq \varnothing$，$A \neq X$，而 $f(A) = \{f(a), f_2(a), \cdots, f_n(a)\} = A$. 证毕.

(3) 作集合 S, T：

$$S = \{A: A \in \mathscr{P}(X) \text{ 且 } A \subset f(A)\},$$

$$T = \bigcup_{A \in S} A (\in \mathscr{P}(X)),$$

则有 $f(T) = T$.

事实上，因为由 $A \in S$ 可知 $A \subset f(A)$. 从而由 $A \subset T$ 可得 $f(A) \subset f(T)$. 根据 $A \in S$ 推出 $A \subset f(T)$，这就导致

$$\bigcup_{A \in S} A \subset f(T), \quad T \subset f(T).$$

另一方面，又从 $T \subset f(T)$ 可知 $f(T) \subset f[f(T)]$，这说明 $f(T) \in$

S，我们又有 $f(T)\subset T$，由此推出结论.

(4) 注意幂集的思想.

例 5 试证明下列命题：

(1) 若 $\overline{\overline{X}}\leqslant c$，$\overline{\overline{Y}}\leqslant c$，则$\overline{\overline{X\times Y}}\leqslant c$.

(2) 设 $X\times X\sim X$(非空集). 若 $\overline{\overline{Y}}\leqslant\overline{\overline{X}}$，则 $X\cup Y\sim X$.

(3) 记由 0,1 两个数字组成的数列之全体为 E，则可作 E 与自然数 $\mathbf{N}$ 的幂集 $\mathscr{P}(\mathbf{N})$间的一一映射.

证明 (1) 不妨假定 $X=Y=\mathscr{P}(\mathbf{N})$，并定义

$$\varphi\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N},\varphi(n)=2n;\quad \psi\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N},\psi(n)=2n-1,$$

再作 $f\colon \mathscr{P}(\mathbf{N})\times\mathscr{P}(\mathbf{N})\to\mathscr{P}(\mathbf{N})$如下：

$$f((A,B))=\varphi(A)\cup\psi(B)\quad (A\in\mathscr{P}(\mathbf{N}),B\in\mathscr{P}(\mathbf{N})),$$

易知 f 是一一映射.

(2) 易知 X 是无限集. 由题设知，存在 $f\colon Y\to X$. 现在对 X 中的元 $a,b,a\neq b$，作映射 $g\colon X\cup Y\to X\times X$ 如下：

$$x\in X,\ g(x)=(x,a);\quad y\in Y\backslash X,\ g(y)=(f(y),b),$$

易知 g 是内射. 再根据 Cantor-Bernstein 定理即可得证.

(3) 作映射 $f\colon \mathscr{P}(\mathbf{N})\to E$ 如下：若 $A\subset\mathbf{N}$，则令 $f(A)=\{x_1, x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，其中 $x_n=1(n\in A)$；$x_n=0(n\overline{\in}A)$. 易知 f 是一一映射.

例 6 试证明下列命题：

(1) 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

(2) 全体正有理数集 $\mathbf{Q}_+$可排列为$\{r_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n^{1/n}=1$.

(3) 存在排列 $\mathbf{Q}=\{r_n\}$，使得 $\mathbf{R}^1\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(r_n-1/n,r_n+1/n)\neq\varnothing$.

(4) 正有理数集 $\mathbf{Q}_+$有排列$\{r_k\}$：

$$r_k=p+q(q+1)/2\quad (p=0,1,2,\cdots,q=1,2,\cdots,p\leqslant q),$$

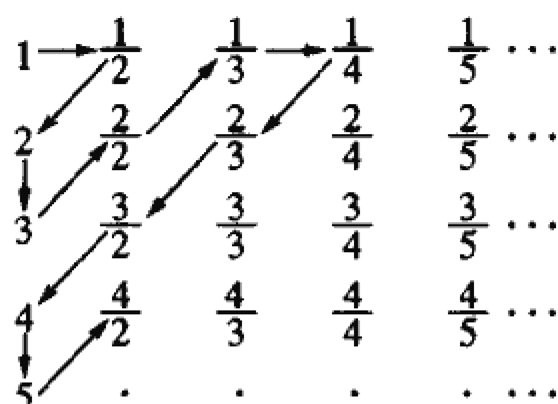
使得用长为 $1/2^{r_k}$的区间覆盖住 r_k，则全部区间总长度等于 1，但覆盖不住点 $x_0=\sqrt{2}/2$.

证明 (1) 只需指出正有理数集 $\mathbf{Q}_+=\{p/q\}$为可列集即可，其中 p,q 都为正整数. 而将后者 $\mathbf{Q}_+$中的元素看成序对(p,q)就可应用上述定理 3.

(2) 作排列$\{r_n\}$如下：

$$1,\frac{1}{2},2,3,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4,5,\frac{1}{5},\frac{1}{6},\cdots,$$

(其中只保留可约化的最简式),其方法如右图所示. 易知第 m 行的每个数都不大于 m,第 m 列的每个数都不小于 $1/m$.



若 r_n 位于图中的第 i 行第 j 列,自然有

$$j\leqslant n,\quad i\leqslant n.$$

从而可知

$$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{j}\leqslant r_n\leqslant i\leqslant n.$$

这就导致

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant r_n^{\frac{1}{n}}\leqslant n^{\frac{1}{n}},$$

即得所证.

(3) 作数集 $A=\mathbf{N}\setminus\{n^2:\ n=2,3,\cdots\}\triangleq\{a_k\}$,其中 $a_k<a_{k+1}$,并选 $t_k\in\mathbf{Q}(k=1,2,\cdots)$,使得 $|t_k-1|<1/a_k$. 现在再将 $\mathbf{Q}\setminus\{t_k\}$ 中的数排列为 $\{s_m\}$,我们令

$$r_n=\begin{cases}s_{\sqrt{n}-1}, & n\overline{\in}A,\\ \text{依次取为 }t_k, & n\in A\end{cases}$$

(如 $r_1=t_1,r_2=t_2,r_3=t_3,r_4=s_1,\cdots$). 因为有

$$\bigcup_{n\in A}(r_n-1/n,r_n+1/n)\subset[-1,2],\quad 1+\sum_{n\in A}2/n\leqslant\pi^2/3,$$

所以命题得证.

(4) 反证法. 假定存在如题设之 p,q,使得

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{p+q(q+1)/2}}\leqslant\frac{1}{2^{1+q(q+1)/2}}.$$

但$\sqrt{2}$是无理数,故 $p^2|2-(q/p)^2|\geqslant1$, $|2p^2-q^2|\geqslant1$. 因此可得

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{|(p/q)^2-1/2|}{(p/q+\sqrt{2}/2)}=\frac{|2p^2-q^2|}{2pq+q^2\sqrt{2}}$$

$$>\frac{1}{4q^2}\geqslant\frac{1}{2^{1+q(q+1)/2}}.$$

这一矛盾导致结论得证.

例 7 试求下列集合 E 的基数：

(1) 设 E 是公差为自然数的等差自然数子列的全体.

(2) 设 E 是 $\mathbf{R}^1$ 中互不相交的开区间族.

(3) 设平面上的直线族 $E=\{3y-2x=5: x\in\mathbf{Q}, y\in\mathbf{Q}\}$.

(4) 设 $E\subset(0,1]$,且满足：由 E 中不同的数组成之级数必收敛.

解 (1) 注意,首项为 n_0 的一切等差自然数列是可列的.

(2) 从每个开区间中取一个有理数,即知 E 是可数集.

(3) E 是可列集.

(4) 作数集 $E_n=\{x\in(0,1]: x\geqslant 1/n\}$,易知 E_n 是有限集. 进一步由 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 即知 E 是可数集.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可数集,则对任意的 $d>0$,存在 $t_0\in\mathbf{R}^1$,使得

$$\{t=t_0+nd: n=1,2,\cdots\}\cap E=\varnothing.$$

(2) 设 E 是二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 中的点集,且 E 中任意两点的距离都是有理数,则 E 是可数集.

(3) 设 E 是平面 $\mathbf{R}^2$ 中的正格点集(即 $(m,n): m,n\in\mathbf{N}$),则存在互不相交的集合 A 与 B,使得 $E=A\cup B$,且任一平行于 x 轴的直线交 A 至多是有限个点,任一平行于 y 轴的直线交 B 至多是有限个点.

(4) 不存在集合 E,使得其幂集 $\mathscr{P}(E)$ 为可列集.

证明 (1) 令 $E=\{x_k\}$,并作集合 $E_k=\{x_k-nd: n\in\mathbf{N}\}$,易知 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可列集,且 $t_0\overline{\in}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ (否则有 E_{k_0} 中点 $x_{k_0}-n_{k_0}d=t_0$).

(2) 记正有理数集 $\mathbf{Q}_+=\{r_n\}$,且取 E 中两个不同点 P_1,P_2,作两族可列个圆：$\{B(P_1,r_n)\},\{B(P_2,r_n)\}$,易知 E 中任意的点均在某两个圆 $B(P_1,r_{n_1}),B(P_2,r_{n_2})$ 的交点处. 注意到两个不同圆的交点至多有两个,由此即得所证.

(3) 令 $A=\{(m,n): m<n\}$,$B=\{(m,n): m\geqslant n\}$ 即可得证.

(4) 注意到有限集的幂集是有限集,而可列集的幂集之基数为 c.

例 9 试证明下列命题：

(1) 设 E 是无限集，试作 E 中可列集 e，使得 $E\setminus e \sim E$.

(2) 设 E 是可列集，则 E 中存在可列个互不相交的真子集.

(3) 设 $E\subset \mathbf{R}^1$. 若对任意的 $x\in E$，均存在 $\delta>0$，使得区间 $(x-\delta, x)$ 与 $(x,x+\delta)$ 中有一个不含 E 的点，则 E 是可数集.

(4) 设 $E\subset \mathbf{R}^1$ 是可列集，则存在 $x_0\in \mathbf{R}^1$，使得 $E\cap(E+\{x_0\})=\varnothing$ $(A+B=\{x+y:\ x\in A, y\in B\})$.

证明 (1) 取 E 中可列个元：$\{x_n\}$，则 $\{x_n\}\sim\{x_{2n}\}$. 从而令 $e=\{x_{2n}\}$，就有 $E\setminus e\sim E$.

(2) 记 $E=\{x_n\}$，并作集合：

$$E_1=\{x_n:\ n=2(2m-1), m\in \mathbf{N}\},$$
$$E_2=\{x_n:\ n=2^2(2m-1), m\in \mathbf{N}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_k=\{x_n:\ n=2^k(2m-1), m\in \mathbf{N}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则 $\{E_k\}$ 互不相交. 这是因为如果存在 $k_1>k_2$，使得 $E_{k_1}\cap E_{k_2}\neq\varnothing$，那么就有

$$2^{k_1}(2m_1-1)=2^{k_2}(2m_2-1),\quad 2^{k_1-k_2}(2m_1-1)=2m_2-1.$$

注意到上式右端是奇数，所以这是不可能成立的等式.

(3) 对 $n=1,2,\cdots$，我们作数集如下：

$$E_n^+=\{x\in E:\ E\cap(x,x+1/n)=\varnothing\},$$
$$E_n^-=\{x\in E:\ E\cap(x-1/n,x)=\varnothing\}.$$

若 $x_1,x_2\in E_n^+$，则 $(x_1,x_1+1/n)$ 与 $(x_2,x_2+1/n)$ 不相交. 从而可知 E_n^+ 是可数集，同理可证 E_n^- 是可数集.

(4) 让我们看一下，当集合 E 与 $E+\{x_0\}$ 的交集不是空集时是一种什么样的情景. 此时，必有 $x',x''\in E$，使得 x' 与 $x''+x_0$ 是同一个点：

$$x'=x''+x_0,\quad 或\quad x'-x''=x_0.$$

难道 $\mathbf{R}^1$ 中的任一点都是 E 中某两个点的差，这是不可能的.

实际上，令 $E=\{r_n\}$，并作点集 A：

$$A=\{r_n-r_m:\ n\neq m\}.$$

因为 A 是可列集，所以存在 $\mathbf{R}^1$ 中点 x_0，满足

$$x_0 \neq r_n - r_m \quad (n \neq m;\ n,m = 1,2,\cdots).$$

即 $r_n \neq r_m + x_0$，即得所证.

例 10 解答下列问题：

(1) 设有集合族 $\Gamma = \{A \subset \mathbf{N}: \overline{\overline{A}} < +\infty\}$.

(i) 试证明 Γ 是可列集.

(ii) 试作映射 $f: \Gamma \to \mathbf{N}$，使得

$$f(A) \leqslant f(B) \quad (A \subset B \in \Gamma).$$

(2) 试作映射 $f: \mathbf{R}^1 \to \mathscr{P}(\mathbf{N})$，使得当 $a, b \in \mathbf{R}^1$ 且 $a < b$ 时，必有 $f(a)$ 是 $f(b)$ 的真子集.

(3) 若 $f: \mathbf{R}^1 \to [0,\infty)$ 是一一映射，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上有无穷多个间断点.

解 (1) (i) 证略. (ii) 作 $E_n = \{A \in \Gamma: A$ 中最大数为 $n\}$，则 $\overline{\overline{E}}_n = 2^{n-1}$. 定义 $\varphi: \Gamma \to \mathbf{N}$ 如下：

$$\varphi(\varnothing) = \varnothing; \quad \varphi(A) = 2^{n+1} + \varphi(A \setminus \{n\}) \quad (A \in E_n),$$

从而令 $f = \varphi + 1$ 即可.

(2) 令 $\varphi: \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$ 是一一映射，且对任意的 $\varnothing \neq E \subset \mathbf{Q}$，$\varphi(E)$ 非空. 现在作 f 如下：

$$f(a) = \varphi(E_a), \quad E_a = \{r \in \mathbf{Q}: r < a\}, \quad a \in \mathbf{R}^1,$$

即可得证.

(3) (i) 假定 $f \in C(\mathbf{R}^1)$，则易知 $f(x)$ 是严格单调函数，不妨设 $f(x)$ 递增. 此时若有 $f(x_0) = 0$，则

$$f(x) > 0 \quad (x > x_0); \quad f(x) < 0 \quad (x < x_0).$$

这与 $R(f) = [0,\infty)$ 矛盾，因此 $f(x)$ 不是连续函数.

(ii) 假定 $f(x)$ 只有有限个间断点：$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{n-1}, x_n)$ 上严格单调. 由此知位于 Y 轴上开区间组

$$f((-\infty, x_1)), f((x_1, x_2)), \cdots, f((x_{n-1}, x_n))$$

是不相交的. 从而点集

$$[0,\infty) \setminus \left[f((-\infty, x_1)) \bigcup_{k=1}^{n-1} f((x_k, x_{k+1})) \cup f((x_n, +\infty)) \right]$$

是 $n+1$ 个点；另一方面，点集

$$\mathbf{R}^1\setminus\left[(-\infty,x_1)\cup\bigcup_{k=1}^{n-1}(x_k,x_{k+1})\cup(x_n,+\infty)\right]$$
中的点仅为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，这与题设矛盾. 因此，$f(x)$必有无穷多个间断点.

例 11 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上，则 $f(x)$的严格极大值点是可数的.

(2) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上满足：对任意的 $x_0\in\mathbf{R}^1$，存在 $\delta>0$，使得 $f(x)\geqslant f(x_0)(|x-x_0|<\delta)$，则值域 $R(f)$是可数集.

(3) 设 $f(x)$定义在(a,b)上，则其第一类间断点是可数的.

(4) 设 $f(x)$定义在 $\mathbf{R}^1$ 上，则点集 $E=\left\{x\in\mathbf{R}^1:\lim\limits_{t\to x}f(t)=+\infty\right\}$是可数集.

证明 (1) 对 $\delta>0$，作点集
$$E_\delta=\{t\in[a,b]:f(t)>f(x),\ x\in[t-\delta,t+\delta]\setminus\{t\}\}.$$
下面指出 E_δ 是有限集. 反之，假定 t_0 是 E_δ 的极限点，并对 $\eta<\delta/2$，取 $E_\delta\cap[t_0-\eta,t_0+\eta]$中的点 $t',t'',t'\neq t''$，则有
$$f(t')>f(t'')\quad(t'-\delta\leqslant t''\leqslant t'+\delta),$$
$$f(t'')>f(t')\quad(t''-\delta\leqslant t'\leqslant t''+\delta).$$
但这是不能成立的，这说明 E_δ 是有限集. 现在作递减正数列 $\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_n>\cdots,\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_{\delta_n}$是可数集. 证毕.

(2) 对任一 $y\in R(f)$，存在 $x\in\mathbf{R}^1,f(x)=y$. 依题设可知，存在 $\delta>0$，使得 y 是区间$[x-\delta,x+\delta]$上 $f(x)$的最小值. 我们取有理点 r',r''：$x-\delta\leqslant r'<x<r''\leqslant x+\delta$，且令函数值 y 与有理端点区间(r',r'')对应. 因为 y 是(r',r'')上函数 $f(x)$的最小值，所以这种对应是一一的，而全体有理端点的区间是可数的.

(3) 作点集如下：$(f(x+0)\triangleq\lim\limits_{t\to x+}f(t))$
$$E_1=\{x\in(a,b):f(x+0)>f(x)\},$$
$$E_2=\{x\in(a,b):f(x+0)<f(x)\},$$
$$E_3=\{x\in(a,b):f(x-0)>f(x)\},$$
$$E_4=\{x\in(a,b):f(x-0)<f(x)\},$$
这些都是可数集. 以 E_1 为例证明此结论. 对 $x\in E_1$，取 $\varepsilon>0$ 以及 l,L

满足

$$f(x)<l<L<f(x+0),\quad f(t)>L\quad (x<t<x+\varepsilon),$$

并作矩形 $I_x=(x,x+\varepsilon)\times(l,L)$，易知

$$I_x\cap I_y=\varnothing\quad (x,y\in E_1,x\neq y).$$

从而只需在 I_x 中取有理数为坐标的点，即可证得.

(4) 考查 $F(x)=\arctan f(x)$.

例 12 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$定义在 $\mathbf{R}^1$ 上，且记 $D_L(f)$，$D_R(f)$各是 $f(x)$的左不连续点集与右不连续点集. 若其中之一是可数集，则另一点集也是.

(2) 设 E_1,E_2 是$[0,1]$中两个互不相交的可列集，则存在$[0,1]$上的函数 $f(x)$，使得 $f(x)$在 E_1 上左连续，在 E_2 上右连续，而在其他点上连续.

证明 (1) 不妨设 $D_R(f)$是可数集，并记 $\omega_f(x)$为 $f(x)$在点 x 处的振幅. 又作点集

$$E_k=\{x\in D_L(f):\omega_f(x)>1/k\},\quad D_L(f)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

现在假定 $D_L(f)$不可数，则存在 E_{k_0}为不可数集. 由此又知 $E=E_{k_0}\setminus D_R(f)$是不可数集. 取 $x_0\in E$，使得$(x_0,x_0+\delta)\cap E\neq\varnothing$(任意 $\delta>0$). 从而有$\{x_n\}\subset E$，使得 $x_n>x_0$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 因此存在 x_n',x_n''，使得

$$x_0<x_n'<x_n,\quad x_0<x_n''<x_n,$$

$$|f(x')-f(x'')|\geqslant 1/2k_0.$$

注意到 $f(x)$在 x_0 处右连续，故令 $n\to\infty$可得 $0\geqslant 1/2k_0$. 这一矛盾说明 $D_L(f)$是可数集.

(2) 作函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}\quad \psi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

且令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(x-r_n)-\psi(x-s_n)]/2^n$，其中 $r_n\in E_1,s_n\in E_2(n=1,2,\cdots)$.

例 13 试证明下列命题：

(1) $\mathbf{R}^1$ 上单调函数的不连续点全体为可数集.

(2) 若 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 的实值函数，则集合

$$\{x \in \mathbf{R}^1: f(x) \text{ 在 } x \text{ 点不连续但右极限 } f(x+0) \text{ 存在(有限)}\}$$

是可数集.

(3) 存在 $\mathbf{R}^1$ 上的递增函数 $f(x)$，它在无理点处连续，而在有理点上间断.

(4) 设 $f(x)$为(a,b)上的实值函数，则集合

$$\{x \in (a,b): \text{右导数 } f'_+(x) \text{ 以及左导数 } f'_-(x) \text{ 存在而不相等}\}$$

为可数集.

(5) 定义在(a,b)上的(下)凸函数在至多除一可列集外的点上都是可微的.

证明 (1) 以单调上升函数 $f(x)$为例：若 x_0 为 $f(x)$的不连续点，则有

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-} f(x) < \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+0).$$

因此，x_0 就对应着一个开区间$(f(x_0-0),f(x_0+0))$. 显然，对于两个不同的不连续点 x_1 及 x_2，区间$(f(x_1-0),f(x_1+0))$与$(f(x_2-0),f(x_2+0))$是互不相交的，故只需看实轴上互不相交的开区间族，后者是可数集.

(2) 令

$$S=\{x\in \mathbf{R}^1: f(x+0) \text{ 存在(有限)}\}.$$

对每个自然数 n，作

$$E_n=\{x\in \mathbf{R}^1: \text{存在 } \delta>0, \text{当 } x',x''\in(x-\delta,x+\delta) \text{ 时},$$
$$\text{有 } |f(x')-f(x'')|<1/n\}.$$

显然，$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 是 $f(x)$的连续点集，从而只需指出 $S\setminus E_n(n=1,2,\cdots)$是可数集即可.

取定任意一个 n，并设 $x\in S\setminus E_n$，则存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x')-f(x+0)|<\frac{1}{2n},\quad x'\in(x,x+\delta).$$

从而当 $x',x''\in(x,x+\delta)$时，就有$|f(x')-f(x'')|<1/n$.

这说明$(x,x+\delta)\subset E_n$. 也就是说 $S\setminus E_n$ 中每一个点 x 是某个开区间 $I_x=(x,x+\delta)$的左端点，且 I_x 与 $S\setminus E_n$ 不相交. 因此当 $x_1,x_2\in S\setminus E_n$

且 $x_1 \neq x_2$ 时，我们得到 $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \varnothing$. 于是区间族 $\{I_x: x \in S \setminus E_n\}$ 是可数的，即 $S \setminus E_n$ 是可数集.

上述这些例子表明，通过集合的基数概念可使我们把握研究对象的某种数量属性.

(3) 记 (a,b) 中有理数全体为 $\{r_n\}$，并作

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty, \quad C_n > 0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

现在定义 (a,b) 上的函数

$$f(x) = \sum_{r_n < x} C_n \quad (\text{即对 } r_n < x \text{ 的指标 } n \text{ 求和}),$$

易知 $f(x)$ 递增，且有

$$f(r_n +) - f(r_n -) = C_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

(4) 令

$$A = \{x \in (a,b): f'_+(x) < f'_-(x)\},$$

$$B = \{x \in (a,b): f'_+(x) > f'_-(x)\}.$$

只需证明 A,B 为可数集即可. 以 A 为例. 对任意的 $x \in A$，选有理数 r_x，使得 $f'_+(x) < r_x < f'_-(x)$. 再选有理数 s_x 及 t_x：

$$a < s_x < t_x < b,$$

使得
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > r_x, \quad s_x < y < x,$$

以及
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < r_x, \quad x < y < t_x,$$

合并得
$$f(y)-f(x) < r_x(y-x),$$

其中 $y \neq x$ 且 $s_x < y < t_x$. 因此，对应规则 $x \to (r_x, s_x, t_x)$ 是从 A 到 $\mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ 的一个映射，而且是一个单射. 这是因为若有 $x_1, x_2 \in A$，使

$$r_{x_1} = r_{x_2}, \quad s_{x_1} = s_{x_2}, \quad t_{x_1} = t_{x_2},$$

则 $(s_{x_1}, t_{x_1}) = (s_{x_2}, t_{x_2})$ 且均含 x_1 及 x_2，于是同时有：

$$f(x_2) - f(x_1) < r_{x_1}(x_2 - x_1),$$

$$f(x_1) - f(x_2) < r_{x_2}(x_1 - x_2),$$

而 $r_{x_1} = r_{x_2}$，故得矛盾. 这说明 A 与 $\mathbf{Q}^3$ 之一子集对等，而 $\mathbf{Q}^3$ 的基数是 $\aleph_0$，即知 A 为可数集.

(5) 所谓(a,b)上的(下)凸函数$f(x)$,是指对(a,b)中任意两点$x_1,x_2,x_1<x_2$,均有

$$f(x)\leqslant\frac{(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)}{x_2-x_1},\quad x_1<x<x_2.$$

将上式进行变换,有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

此外对$x<x_2'<x_2$,我们有

$$\frac{f(x_2')-f(x)}{x_2'-x}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

这说明存在右导数:

$$\lim_{x_2'\to x+}\frac{f(x_2')-f(x)}{x_2'-x}=f'_+(x)<+\infty.$$

类似地可知左导数$f'_-(x)$存在,且有

$$-\infty<f'_-(x)\leqslant f'_+(x)<\infty.$$

从而可得结论:(a,b)上的(下)凸函数在至多除一可数点集外都是可微的.

例 14 试证明下列命题:

(1) 设$f\in C([a,b])$,$E\subset[a,b]$是可数集.若有$f'(x)>0(x\in[a,b]\setminus E)$,则$f(x)$是严格递增的.

(2) 设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$是$\mathbf{R}^1$上的递增函数.若存在$M>0$,使得$|f_n(x)|\leqslant M(n\in\mathbf{N},x\in\mathbf{R}^1)$,则存在$\mathbf{R}^1$上的函数$f(x)$以及$\{n_k\}$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)(x\in\mathbf{R}^1)$.

(3) 设$f\in C([a,b])$,$D\subset[a,b]$是可数集.若对任意的$x\in[a,b)\setminus D$,均存在$\delta>0$,使得$f(t)>f(x)(x<t<x+\delta)$,则$f(x)$是严格递增函数.

证明 (1) 只需指出$f(x)$是递增的即可.若不然,则有$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$,使得$f(x_2)<f(x_1)$.选取函数值$y_0$:$f(x_2)<y_0<f(x_1)$,并作点集$A_0=\{x\in[x_1,x_2]:f(x)=y_0\}$,由于$f$的连续性,可知$A_0$中必有最大数值的点,不妨记为$x_0$.因为$x_0<x_2$,且在$(x_0,x_2]$上,有

$f(x)<y_0=f(x_0)$，所以得到

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0,\quad f'(x_0)\leqslant 0.$$

导致矛盾，即得所证.

(2) (i) 记 $\mathbf{Q}=\{r_n\}$，则由 $|f_n(r_1)|\leqslant M$ 可知，存在子列 $\{f_{n_k}(r_1)\}$，使得 $\{f_{n_k}(r_1)\}$ 收敛. 对 r_2，从 $\{f_{n_k}(r_2)\}$ 中再抽子列，使得 $\{f_{n_{k_i}}(r_2)\}$ 收敛. 依次继续抽下去，可得子列(不妨仍记为) $\{f_{n_k}(x)\}$，它在 $\mathbf{Q}$ 上收敛，且记在 $\mathbf{Q}$ 上的极限函数为 f，易知 f 在 $\mathbf{Q}$ 上是递增函数. 现在令

$$f(x)=\sup\{f(r):r\in\mathbf{Q},r\leqslant x\},\quad x\in\mathbf{R}^1.$$

显然，此 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上递增.

(i) 若 x_0 是 $f(x)$ 的连续点，则选取 $p_n,q_n(n\in\mathbf{N})$：

$$p_n,q_n\in\mathbf{Q},\ p_n<x_0<q_n,\quad \lim_{n\to\infty}p_n=x_0=\lim_{n\to\infty}q_n.$$

因为 $f_{n_k}(p_n)\leqslant f_{n_k}(x_0)\leqslant f_{n_k}(q_n)$，令 $k\to\infty$ 可得

$$f(p_n)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}f_{n_k}(x_0)\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}f_{n_k}(x_0)\leqslant f(q_n).$$

再令 $n\to\infty$，又知

$$f(x_0-0)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}f_{n_k}(x_0)\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}f_{n_k}(x_0)\leqslant f(x_0+0),$$

而 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，所以有

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x_0)=f(x_0).$$

(ii) 注意到单调函数 $f(x)$ 的不连续点是可数的，记为 $\{t_k\}$，则采用上述在 $\mathbf{Q}$ 上取子列同样的方法，还可从 $\{f_{n_k}(x)\}$ 再抽子列，使该子列在 $\{t_k\}$ 上收敛，而这一子列当然仍在 $f(x)$ 的连续点上是收敛的. 证毕.

(3) 反证法. 假定存在 c,d：$a\leqslant c<d\leqslant b$，使得 $f(c)>f(d)$. 则对任意的 t：$f(c)\geqslant t>f(d)$，在 $[c,d)$ 上均存在 $f(x)$ 的最大值点 x_t：$f(x_t)\geqslant t$. 我们有不可数个点 x：$x_t<x<d$，使得 $f(x)<f(x_t)$，这与题设矛盾，故 $f(x)$ 是递增函数.

此外，令 $e\in[c,d)\setminus D$，有 $\delta>0$，使得

$$x\in(e,e+\delta)\cap(e,d),\quad f(c)\leqslant f(e)<f(x)\leqslant f(d).$$

即 $f(x)$ 是严格递增的.

例 15 试证明下列问题：

(1) 试作开圆 $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 与闭圆盘 $\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$

之间的一一对应.

(2) (i) 存在 $\mathbf{N}$ 中某子集族 Γ,满足

$$\overline{\overline{\Gamma}} = c; \quad \overline{\overline{A \cap B}} < +\infty \quad (A,B \in \Gamma).$$

(ii) 存在 $\mathbf{N}$ 中某子集族 Γ 满足 $\overline{\overline{\Gamma}}=c$,且满足:

对任意的 $t>0$,任意的 $A,B\in\Gamma$,不等式

$|a-b|<t$ 只对有限多个 $a\in A,b\in B$ 成立.

(iii) 存在 $\mathbf{N}$ 中某子集族 Γ 满足 $\overline{\overline{\Gamma}}=c$,且有

对任意的 $A,B\in\Gamma$,均有 $A\subset B$ 或 $B\subset A$.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $\overline{\overline{E}}<c$,则存在 $x_0\in\mathbf{R}^1$,使得

$$E + \{x_0\} = \{x + x_0 : x \in E\} \subset \mathbf{R}^1\backslash\mathbf{Q}.$$

证明 (1) 首先,易知两个同中心不同半径的圆周上之点是可以建立起一一对应的. 其次作圆周集合列: $A_n = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1/n\}(n \in \mathbf{N})$,则

$$E_1 = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \subset \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\},$$

$$E_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

且 $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} A_n \sim \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 此外又有

$$\{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}\backslash E_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant 1\}\backslash E_2.$$

由此即得所证.

(2) (i) 由于 $\mathbf{N}\sim\mathbf{Q}$,故对 $\mathbf{Q}$ 作 Γ 即可: 记 Γ 为收敛于不同极限的有理列之全体(其中同一极限的只取一列). 因为 $\overline{\overline{\mathbf{R}}}^1=c$,所以 $\overline{\overline{\Gamma}}=c$. 此外,$\Gamma$ 中任两个元 A,B 即两个数列中只能有有限项相同,故知 $\overline{\overline{A\cap B}}<+\infty$.

(ii) 利用(i)的结论,但以 $\{2,2^2,\cdots\}$ 代 $\mathbf{N}$.

(iii) 因为 $\mathbf{N}\sim\mathbf{Q}$,所以先对 $\mathbf{Q}$ 作如下集合: 考查点集 $E_\alpha=(-\infty,\alpha)\cap\mathbf{Q}(\alpha\in\mathbf{R}^1)$. 易知 $\Gamma=\{E_\alpha: \alpha\in\mathbf{R}^1\}$ 是连续基数集,且对 E_{α_1}, $E_{\alpha_2}\in\Gamma$,必有 $E_{\alpha_1}\subset E_{\alpha_2}$ 或 $E_{\alpha_2}\subset E_{\alpha_1}$.

(3) 令 $B=\mathbf{Q}-E\triangleq\{r-s: r\in\mathbf{Q},s\in E\}$,则 $\overline{\overline{B}}<c$. 由此知存在 $x_0\overline{\in} B$,使得 $E+\{x_0\}\subset\mathbf{R}^1\backslash\mathbf{Q}$,这是因为否则就有 $s\in E$,使得 $s+x_0=r\in\mathbf{Q}$,

即 $x_0=r-s\in B$，矛盾.

例 16 试证明下列命题：

(1) $\mathbf{R}^1$ 中一切开区间的全体记为 G，则 $\overline{\overline{G}}=c$.

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是不可数集，则存在 $x_0\in E$，使得对任意的 $\delta>0$，$E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 均为不可数集.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是不可数集，令

$$D=\{x\in E:\ 对任意的\ \delta>0,E\cap(x-\delta,x+\delta)是不可数集\},$$

则

(i) D 是不可数集；

(ii) 存在 $x_0\in E$，使得对任意的 $\delta>0$，点集 $E\cap(x_0,x_0+\delta)$ 是不可数集.

证明 (1) 对每一个开区间 (a,b)，用平面上点 (a,b) 与之对应，则 G 与点集 $\{(x,y):\ x,y\in\mathbf{R}^1\ 且\ x<y\}$ 一一对应，即得所证.

(2) 反证法. 假定结论不真，则对任意 $x\in E$ 存在 $\delta_x>0$，使得 $E\cap(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 是可数集. 因此，我们取有理数 r_x，使 $E\cap(x-r_x,x_0+r_x)$ 是可数集. 从而知 $E=\bigcup\limits_{r_x\in\mathbf{Q}}(x-r_x,x+r_r)\cap E$ 是可数集. 这与题设矛盾. 证毕.

(3) (i) 反证法. 假定 D 是可数集，则点集 $E\setminus D$ 是不可数集. 由此知存在 $x_0\in E\setminus D$，以及任意的 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得 $(E\setminus D)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 是不可数集. 因此又得 $x_0\in D$，矛盾. 故 D 是不可数集.

(ii) 由(i)知，可取 $x_0\in D$，使得 $D\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)(0<\delta<1)$ 是不可数集. 若 $D\cap(x_0,x_0+\delta)(0<\delta<1)$ 是不可数集，则得证；否则，就有 $(x_0-\delta,x_0)\cap D$ 是不可数集. 我们取 $x'\in(x_0-\delta,x_0)\cap D$，易知存在 n_0，使得 $(x',x'+1/n)\cap D$ 是不可数集. 故再令 $x_0=x'$ 即得所证.

例 17 试证明下列命题：

(1) 一切形如 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 的自然数子列 $\{n_k\}$ 的全体的基数为 c.

(2) 一切由自然数组成的数列 $\{m_k\}$ 之全体的基数是 c.

(3) 设 $\overline{\overline{E}}_n=c(n=1,2,\cdots)$，则集合

$$E=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\ x_n\in E_n(n\in\mathbf{N})\}$$

之基数也是 c.

(4) 设 $E=A\cup B$. 若 $\overline{\overline{E}}=c$,则 $\overline{\overline{A}}=c$ 或 $\overline{\overline{B}}=c$.

证明 (1) 将数列 $\{n_k\}$ 与由 0,1 两个数字组成的数列 $\{a_m\}$ 对应: $a_m=1(m=n_k)$; $a_m=0(m\neq n_k)$即可得证.

(2) 令 $n_1=m_1, n_2=m_1+m_2, \cdots, n_k=\sum_{i=1}^{k} m_i, \cdots$, 且应用(i)的结论.

(3) 不妨假定每个 E_n 都是由自然数组成的数列为元素的全体所形成的集合,即当 $x_n\in E_n$ 时,有

$$x_n: \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots\},$$

其中 $x_k^{(n)}$ 是自然数. 这样,对于 $x\in E$,就对应着一个无穷矩阵:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_k^{(1)} & \cdots \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_k^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_k^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix},$$

记如此之矩阵的全体形成之集为 A,则易知 $E\sim A$. 现在,视 A 中元素为自然数列

$$\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_3^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, x_4^{(1)}, \cdots\},$$

则又有 $\overline{\overline{A}}=c$(实际上 $A\sim E_n$).

(4) 不妨认定 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中单位正方形:

$$E=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$$

(已知 $\overline{\overline{E}}=c$),若存在 x_0: $0<x_0<1$,使得

$$A\supset E_0=\{(x_0,y): 0<y<1\},$$

则 $\overline{\overline{A}}=c$. 否则,对任意的 x, $0<x<1$,有

$$B\cap\{(x,y): 0<y<1\}\neq\varnothing,$$

则 $\overline{\overline{B}}=c$.

例 18 试证明下列命题:

(1) 全体超越数(即不是整系数方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根)的基数是 c.

(2) 区间$[a,b]$上的连续函数全体 $C([a,b])$的基数是 c.

(3) 定义在$[a,b]$上的单调函数全体形成的集合 X 的基数是 c.

(4) 记定义在$[a,b]$上的一切实值函数之全体形成的集合为 $\mathscr{F}$，则$\overline{\overline{\mathscr{F}}}>c$.

(5) 设 X 是$[a,b)$上右连续的单调函数全体，则 $\overline{\overline{X}}=c$.

证明 (1) 因为整系数方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根($n\in\mathbf{N}$,即代数数)之全体为可列集，所以超越数全体是不可数的且是连续基数.

(2) 首先，因为$[a,b]$上的常数函数都是$[a,b]$上的连续函数，所以 $\mathbf{R}^1$ 与 $C([a,b])$中的一个子集对等，即 $C([a,b])$的基数大于或等于 c. 其次，对每个 $\varphi\in C([a,b])$，我们取一个平面有理点集 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^2$ 中的一个子集与它对应，即作映射 f 如下：

$$f(\varphi)=\{(s,t)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}:\ s\in[a,b],t\leqslant\varphi(s)\}.$$

易知 f 是从 $C([a,b])$到 $\mathscr{P}(\mathbf{Q}^2)$中子集的一个单射，由于$\mathscr{P}(\mathbf{Q}^2)\sim\mathscr{P}(\mathbf{N})$，故知 $\mathscr{P}(\mathbf{Q}^2)$的基数是 c. 从而可知 $C([a,b])$的基数小于或等于 c. 这说明 $C([a,b])$的基数是 c.

(3) 任给 $f\in X$，且设其在$[a,b]$内的间断点为$\{x_n\}$，则 f 在间断点上的值形成一个数列$\{f(x_n)\}$；若 $x_0\in[a,b]$是 $f(x)$的连续点，则取 $r_k\in\mathbf{Q}$: $r_k\to x_0(k\to\infty)$. 易知 $f(x_0)$对应于数列$\{f(r_k)\}$. 从而可推 $\overline{\overline{X}}=c$.

(4) 首先，由上例(2)知$\overline{\overline{\mathscr{F}}}\geqslant c$.

其次，假定$\overline{\overline{\mathscr{F}}}=c$，设 $\mathscr{F}\sim[0,1]$. 此时不妨令 $f_t(x)=F(t,x)$ $(x\in[0,1])$与$[0,1]$中的 t 作对应. 显然，$g(x)=F(x,x)+1$ 是 $\mathscr{F}$ 中的元，从而存在 α: $0\leqslant\alpha\leqslant1$，使得 $g(x)=f_\alpha(x)$. 由此得

$$F(x,x)+1=F(\alpha,x),\quad x\in[0,1].$$

但这显然是不能成立的，只要取 $x=\alpha$ 即知. 这说明$\overline{\overline{\mathscr{F}}}>c$.

(5) 设 $f\in X$，则对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$，可对应着一个 X 中的函数 $f(x)+t$. 这说明 $\overline{\overline{X}}\geqslant c$，从而即得所证.

例 19 解答下列问题：

(1) 试作$(0,1)$上的函数 $f(x)$，使得在任意的$(\alpha,\beta)\subset(0,1)$上，$f(x)$的连续点集和间断点集的基数均为不可数的.

(2) 试问是否存在 $f\in C((-\infty,\infty))$，使得

$$f(x)=\begin{cases}\text{无理数}, & x\in \mathbf{Q},\\ \text{有理数}, & x\in \mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}?\end{cases}$$

(3) 试问是否存在 $f: \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^1$,使得 f 在 $\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}$ 上是一一映射,在 $\mathbf{Q}$ 上不是一一映射?

(4) 试问对于定义在$[0,1]\times[0,1]$上的非负函数 $f(x,y)$,是否均存在 $g: [0,1]\to[0,\infty)$,使得

$$f(x,y)\leqslant g(x)\cdot g(y)\quad (x,y\in[0,1])?$$

解 (1) 设$C\subset[0,1]$是 Cantor 集(见 1.2.4). 令 $f(x)=\chi_C(x)$.

(2) 不存在. 由于 $\mathbf{Q}$ 是可列集,故 $f(\mathbf{Q})$是可数集. 此外,又有 $f(\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q})\subset\mathbf{Q}$,从而知 $f(\mathbf{R}^1)$是可数集. 然而 $f(x)$是连续函数,因此 $f(\mathbf{R}^1)$应包含区间. 这是矛盾的. 证毕.

(3) 不存在. 采用反证法. 假定存在具有如此性质的 f,依题设知就有 $a,b\in\mathbf{Q}$,使得 $f(a)=f(b)=y_0$. 作点集 $A=\{x\in[a,b]: f(x)=y_0\}$,显然 A 不能在$[a,b]$中稠密(注意 f 连续,这会破坏在 $\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}$ 上的一一对应). 从而存在 $a_1,b_1\in A$,而 $(a_1,b_1)\cap A=\varnothing$. 由知可知, $f((a_1,b_1))>y_0$或$f((a_1,b_1))<y_0$. 不妨设

$$f([a_1,b_1])=[y_0,f(x')],\quad x'\in(a_1,b_1),$$

因为 f 在 $\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}$ 上是一一映射,所以有

$$f([a_1,x']\cap(\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}))\subset f([x',b_1]\cap\mathbf{Q}).$$

但这是不可能的(无理数不可数). 证毕.

(4) 不一定. 令 $E_n=\{x\in[0,1]: g(x)\leqslant n\}$, $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 E_n 是有限集(否则有$\{x_k\}\subset E_n$, $x_i\neq x_j(i\neq j)$,而且 $x_k\to x\in(0,1)$). 现在作二元函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/|x-y|, & x\neq y,\\ 1, & x=y,\end{cases}$$

易知

$$(x_k,x_{k+1})\to(x,x)(k\to\infty),\quad f(x_k,x_{k+1})\to+\infty(k\to\infty),$$

但$g(x_k)\cdot g(x_{k+1})\leqslant n^2$,矛盾.

§1.2 点　集

1.2.1 $\mathbf{R}^n$ 中点与点之间的距离、点集的极限点

基本内容

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的点(也称向量)，记

$$x \pm y = (\xi_1 \pm \eta_1, \xi_2 \pm \eta_2, \cdots, \xi_n \pm \eta_n),$$

$$|x - y| = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2]^{1/2},$$

并称 $|x-y|$(也记为 $d(x,y)$)为点 x 到点 y 之间的**距离**. 易知

(i) $|x|\geqslant 0$; $|x|=0$ 当且仅当 $x=(0,0,\cdots,0)$.

(ii) $|ax|=|a||x|(a\in\mathbf{R}^1)$.　(iii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

定义 1　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，令 $\mathrm{diam}(E)=\sup\{|x-y|: x,y\in E\}$，并称为点集 E 的**直径**. 若 $\mathrm{diam}(E)<+\infty$，则称 E 为**有界集**.

显然，E 是有界集的充分且必要条件是存在 $M>0$，使得一切 $x\in E$ 都满足 $|x|\leqslant M$.

定义 2　设 $x_0\in\mathbf{R}^n$，$\delta>0$，我们称点集 $\{x\in\mathbf{R}^n: |x-x_0|<\delta\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中以 x_0 为中心，以 δ 为半径的**开球**，也称为 x_0 的**(球)邻域**，记为 $B(x_0,\delta)$，从而称 $\{x\in\mathbf{R}^n: |x-x_0|\leqslant\delta\}$ 为**闭球**，记为 $C(x_0,\delta)$. $\mathbf{R}^n$ 中以 x_0 为中心，以 δ 为半径的**球面**是 $\{x\in\mathbf{R}^n: |x-x_0|=\delta\}$.

定义 3　设 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$皆为实数且 $a_i<b_i(i=1,2,\cdots,n)$，我们称点集

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n): a_i<\xi_i<b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中的**开矩体**($n=2$ 时为矩形，$n=1$ 时为区间)，即直积集

$$(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n).$$

类似地，$\mathbf{R}^n$ 中的**闭矩体**以及**半开闭矩体**就是直积集

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n],\quad (a_1,b_1]\times\cdots\times(a_n,b_n],$$

称 $b_i-a_i(i=1,2,\cdots,n)$为矩体的**边长**. 若各边长都相等，则称矩体为**方体**.

矩体也常用符号 I,J 等表示. 其体积用 $|I|$，$|J|$等表示.

若 $I=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$，则 $|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

定义 4　设 $x_k\in\mathbf{R}^n(k=1,2,\cdots)$. 若存在 $x\in\mathbf{R}^n$，使得

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x|=0,$$

则称 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中**收敛**(于 x 的)**点列**,称 x 为它的**极限**,并简记为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k = x$.

若令 $x_k=\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}\}$, $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$,则由于不等式

$$|\xi_i^{(k)}-\xi_i|\leqslant|x_k-x|\leqslant|\xi_1^{(k)}-\xi_1|+\cdots+|\xi_n^{(k)}-\xi_n|$$

对一切 k 与 i 都成立,故可知 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 收敛于 x 的充分且必要的条件是:对每个 i,实数列 $\{\xi_i^{(k)}\}$ 都收敛于 ξ_i. 由此以及根据实数列收敛的 Cauchy 原理可知, $x_k(k=1,2,\cdots)$ 是收敛列的充分且必要条件是

$$\lim_{l,m\to\infty}|x_l-x_m|=0 \quad (\text{也称}\{x_k\}\text{ 为 Cauchy 列或基本列}).$$

定义 5 设 $E\subset\mathbf{R}^n$, $x\in\mathbf{R}^n$. 若存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$,则称 x 为 E 的**极限点**(**或聚点**); E 的极限点全体记为 E',称为 E 的**导集**,显然,有限集是不存在极限点的.

定理 1 若 $E\subset\mathbf{R}^n$,则 $x\in E'$,当且仅当对任意的 $\delta>0$,有 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing$.

定义 6 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 E 中的点 x 不是 E 的极限点,即存在 $\delta>0$,使得 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E=\varnothing$,则称 x 为 E 的**孤立点**,即 $x\in E\setminus E'$.

定理 2 若 $E_1,E_2\subset\mathbf{R}^n$,则 $(E_1\cup E_2)'=E_1'\cup E_2'$.

定理 3 (Bolzano-Weierstrass) $\mathbf{R}^n$ 中任一有界无限点集 E 至少有一个极限点.

典型例题精解

例 1 求下列点集 E 的导集 E':

(1) $E=\{1/n+1/m: n,m\in\mathbf{N}\}$;

(2) $E=\{(\sqrt{m}-\sqrt{n})/(\sqrt{m}+\sqrt{n}): m,n\in\mathbf{N}\}$;

(3) $E=\{x_n=\sqrt[n]{4^{(-1)^n}+2}: n\in\mathbf{N}\}$;

(4) $E=\{x_n=[(1-(-1)^n)2^n+1]/(2^n+3): n\in\mathbf{N}\}$;

(5) $E=\{x_n=[(1+\cos n\pi)\ln 3n+\ln n]/\ln 2n: n\in\mathbf{N}\}$;

(6) $E=\{x_n=\sin n^{2/3}: n\in\mathbf{N}\}$; (7) $E=\{x_n=\sin\ln n: n\in\mathbf{N}\}$;

(8) $E=\{x_n=\sqrt{m}-\sqrt{n}: m,n\in\mathbf{N}\}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n+1/m)=1/m(m\in\mathbf{N})$, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)=0$,所以 $E'=\{0,1,1/2,\cdots\}$.

(2) 对任意的 $x_0\in[-1,1]$,存在 $m,n\in\mathbf{N}$,使得

$$\left|\frac{m}{n}-\left(\frac{1-x_0}{1+x_0}\right)\right|<\varepsilon \quad 或 \quad \left|\sqrt{\frac{m}{n}}-\frac{1-x_0}{1+x_0}\right|<\varepsilon.$$

由此可知存在 $\eta,\varepsilon>\eta>0$，使得

$$\left|x_0-\frac{1-\sqrt{m/n}}{1+\sqrt{m/n}}\right|<\eta.$$

这说明 $E'=[-1,1]$.

(3) $E'=1$.

(4) 考查 $x_{2k}=1/(2^{2k}+3)$，$x_{2k+1}=(2^{2k+2}+1)/(2^{2k+1}+3)(k\in\mathbf{N})$，易知 $E'=\{0,2\}$.

(5) 考查 $x_{2k}=[2\ln(6k)+\ln(2k)]/\ln(4k)$，$x_{2k+1}=\ln(2k+1)/\ln[2(2k+1)](k\in\mathbf{N})$，易知 $E'=\{1,3\}$.

对(6)与(7)，应用命题(见《数学分析》，周民强编著，上海科技出版社)：

若数列 $E=\{x_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，则

$$E'=\left[\varliminf_{n\to\infty}x_n,\ \varlimsup_{n\to\infty}x_n\right].$$

(6) 注意到$(n+1)^{2/3}=n^{2/3}(1+1/n)^{2/3}=n^{2/3}(1+O(1/n))=n^{2/3}+O(1/n^{1/3})$，则由等式

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\sin(n+1)^{2/3}-\sin n^{2/3}\\&=2\cos[((n+1)^{2/3}+n^{2/3})/2]\cdot\sin[((n+1)^{2/3}-n^{2/3})/2]\\&=2\cos[((n+1)^{2/3}+n^{2/3})/2]\cdot\sin[(1/n^{1/3})/2]\to0(n\to\infty),\end{aligned}$$

可知 $E'=[-1,1]$.

(7) 注意到 $\ln(n+1)-\ln n=\ln(1+1/n)\to0(n\to\infty)$，则由等式

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=2\cos[(\ln(n+1)+\ln n)/2]\\&\quad\cdot\sin[(\ln(n+1)-\ln n)/2]\\&=2\cos[(\ln(n+1)+\ln n)/2]\\&\quad\cdot\sin[\ln(1+1/n)/2]\to0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

可知 $E'=[-1,1]$.

(8) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}^1$，令 $x_n=\sqrt{[(x+n)^2]}-\sqrt{n^2}$ (其中$[y]$表示不大于 y 的整数部分)，则有$\sqrt{(x+n)^2-1}-n<x_n<x$，因而可得

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - x| = 0$. 从而 $E' = \mathbf{R}^1$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$. 若 E' 是可数集，则 E 是可数集.

(2) 若 $E\subset(0,\infty)$ 中的点不能以数值大小加以排列，则 $E'\neq\varnothing$.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是不可数集，则 E 中有互异点列 $\{x_n\}$ 以及 $x_0\in E$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x_0$.

证明 (1) (i) 若 $S\subset\mathbf{R}^1$ 中的点均为孤立点，则 S 是可数集. 这是因为对任意的 $x\in S$，均有 $\delta_x>0$，使得 $I_x\triangleq(x-\delta_x, x+\delta_x)$ 且 $I_x\cap S=\{x\}$. 因此区间族 $\{I_x\}(x\in S)$ 互不相同，易知总数是可数的，即 S 是可数集.

(ii) 因为 $E\setminus E'$ 中的点均为孤立点，所以是可数集. 从而由 $E=(E\setminus E')+(E\cap E')$ 可知 E 是可数集.

(2) 考查区间 $I_1=[0,1], I_2=[0,2], \cdots, I_n=[0,n], \cdots$，由题设知必存在 n_0，使得 $I_{n_0}\cap E$ 包含无限个点. 从而知 $E'\neq\varnothing$.

(3) (i) 由题设知，必存在 n_0，使得点集 $(-n_0, n_0)\cap E$ 是无限集，故 $E'\neq\varnothing$.

(ii) 反证法. 假定 $E'\cap E=\varnothing$，则对任意的 $x\in E$，存在 $\delta_x>0$，使得点集 $B(x,\delta_x)\cap E=\{x\}$. 从而根据(1)之(i)中相同的推理，可知 E 是可数集. 这一矛盾说明 $E'\cap E\neq\varnothing$.

例 3 解答下列问题：

(1) 设 $E=\{x_k\}\subset\mathbf{R}^1$ 是有界列，且 $|x_n - x_{n+1}|\geqslant 1 (n\in\mathbf{N})$，试问是否 E' 只是有限集？

(2) 试在单位开圆 $B(0,1)$ 内作可列集 E，使得 $E'\supset\{(x,y): x^2+y^2=1\}$.

(3) 试作 $E\subset\mathbf{R}^1$，且令 $E_1=E', E_2=(E_1)', \cdots, E_n=(E_{n-1})', \cdots$，满足：$E_i\cap E_j=\varnothing (i\neq j)$.

(4) 若 $[0,1]$ 中的两个点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 具有相同的极限，试证明存在 $\{k_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}|x_n - y_{k_n}| = 0.$$

解 (1) 否. 例如将双指标数列 $\{1/n+1/m\}$ 与 $\{4+1/n+1/m\}$ 均

匀地隔项排列.

(2) 取 $E=\{x_n^k\}$,其中 $x_n^k=(1-1/n)e^{i2n\pi}\cdot e^{\frac{ik2\pi}{n}}(n,k\in\mathbf{N})$.

(3) 作点集 $A_1=\{1/m_1: m_1=1,2,\cdots\}$,以及

$$A_2=\{1+1/m_1+1/m_2: m_1,m_2=2,3,\cdots\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_k=\{(k-1)+1/m_1+\cdots+1/m_k: \\ m_1,\cdots,m_k=k,k+1,\cdots\},$$

$$\cdots\cdots$$

而取 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(4) 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,且令 $\varepsilon_n=1/n+|x_n-a|(n\in\mathbf{N})$,易知开区间 $(x_n-\varepsilon_n,x_n+\varepsilon_n)$ 含有 $E=\{y_n\}$ 中的无穷多个点.现在记 E 中属于 $(x_1-\varepsilon_1,x_1+\varepsilon_1)$ 的点之最小指标为 $k_1>1$,再相继地对 k_n,在指标大于 k_n 的含于 $(x_{n+1}-\varepsilon_{n+1},x_{n+1}+\varepsilon_{n+1})$ 中 E 之点的最小指标记为 k_{n+1},即可得到 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_{k_n}|=0$.

例 4 解答下列问题:

(1) 设 $f\in C^{(1)}([a,b])$,试证明点集 E 是孤立点集,其中

$$E=\{x\in[a,b]: f(x)=0 \text{ 且 } f'(x)>0\}.$$

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots\}$是两个自然数子列,若有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0,$$

则称 B 是比 A 增长更快的数列.

现在,设 S 是由某些自然数子列构成的数列族,且对于任一自然数子列 A,均有 $B\in S$,使得 B 比 A 增长更快.试证明 S 是不可数集.

(3) 设 $E_n\subset\mathbf{R}^1(n\in\mathbf{N})$,且 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.若 $x\in E'$,试问是否必有 n_0,使得 $x\in E'_{n_0}$?

(4) 试作 $\mathbf{R}^2$ 中的孤立点集 E,使得 $E'=[0,1]$.(注意,若 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是孤立点集,则 E' 是可数集,不存在 $E\subset\mathbf{R}^1$,E 有不可列个孤立点.)

(5) 试作 $E\subset\mathbf{R}^2$,$E'=\varnothing$,满足:对任给 $\varepsilon>0$,存在 $x,y\in E$ 且 $0<|x-y|<\varepsilon$.

解 (1) 设 $x_0\in E$,则 $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)>0$. 由 $f'(x)$的连续性,可知有 $\delta_0>0$,使得 $f'(x)>0(x_0-\delta_0<x<x_0+\delta_0)$. 从而 $f(x)$在$(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$上严格递增. 因此我们有$|f(x)|>f(x_0)(x_0-\delta_0<x<x_0+\delta_0)$. 证毕.

(2) 反证法. 假定 S 是可数集,则不妨设 S 中的元素为:

$$
\begin{array}{l}
a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},\cdots \\
a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn},\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

现在,作自然数子列 $A=\{b_n\}$: $b_1=a_{11},b_2=\max\{a_{ij}: i,j=1,2\}$, $\cdots,b_n=\max\{a_{ij}: i,j=1,2,\cdots,n\},\cdots$,则 S 中不存在元素 B,使得 B 比 A 增长更快,矛盾.

(3) 不一定. 例如 $E_n=(1/(n+1),1/n]$,则 $E=(0,1]$. 故 $x=0\in E'$,但 $E_n'=[1/(n+1),1/n]$. 从而 $x=0\overline{\in} E_n'(n\in\mathbf{N})$.

(4) 我们作点集列如下:

$$
\begin{array}{l}
E_1=\{(x,1): x=k/2,k=0,1,2\}, \\
E_2=\{(x,1/2): x=k/2^2,k=0,1,2,3,2^2\}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E_n=\{(x,1/n): x=k/2^n,k=0,1,2,\cdots,2^n\}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

又记 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,则 E 是可列集,且 E 中每个点均为孤立点,但 $E'=[0,1]$.

(5) 令 $E_1=\{(0,n)\},E_2=\{(n,\mathrm{e}^{-n})\}$,而 $E=E_1\cup E_2$.

1.2.2 $\mathbf{R}^n$ 中的基本点集:闭集、开集

基 本 内 容

(一) 闭集

定义 1 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $E\supset E'$(即 E 包含 E 的一切极限点),则称 E 为**闭集**(这

里规定空集为闭集). 记 $\bar{E}=E\cup E'$，并称 $\bar{E}$ 为 E 的**闭包**(E 为闭集就是 $E=\bar{E}$).

注 若 $A\subset B$ 且 $\bar{A}=B$，则称 A 在 B 中**稠密**，或称 A 是 B 的**稠密子集**. 若 $E\subset \mathbf{R}^1$ 且 $\bar{E}$ 无内点，则称 E 是**无处稠密集**.

定理 1(闭集的运算性质) (i) 若 F_1,F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，则其并集 $F_1\cup F_2$ 也是闭集，从而有限多个闭集的并集是闭集；

(ii) 若 $\{F_\alpha\colon \alpha\in I\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭集族，则其交集 $F=\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 是闭集.

注意，无穷多个闭集的并集不一定是闭集. 例如，令

$$F_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]\subset \mathbf{R}^1\quad (k=1,2,\cdots),$$

则有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k=(0,1].$$

此例还说明

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k}\neq\bigcup_{k=1}^{\infty}\bar{F}_k.$$

但我们有下列简单事实：设 $E_\alpha\subset\mathbf{R}^n(\alpha\in I)$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}\bar{E}_\alpha\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha},\quad \overline{\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha}\subset\bigcap_{\alpha\in I}\bar{E}_\alpha.$$

定理 2 (Cantor 闭集套) 若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空有界闭集列，且满足 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_k\supset\cdots$，则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k\neq\varnothing$.

(二) 开集

定义 2 设 $G\subset\mathbf{R}^n$. 若 $G^c=\mathbf{R}^n\setminus G$ 是闭集，则称 G 为**开集**.

由此定义立即可知，$\mathbf{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$ 是开集；$\mathbf{R}^n$ 中开矩体是开集；闭集的补集是开集.

定理 3 (开集的运算性质) (i) 若 $\{G_\alpha\colon \alpha\in I\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族，则其并集 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$ 是开集；

(ii) 若 $G_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，则其交集 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{m}G_k$ 是开集(无穷多个开集的交集不一定是开集)；

(iii) 若 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，则 G 是开集的充分且必要的条件是：对于 G 中任一点 x，存在 $\delta>0$，使得 $B(x,\delta)\subset G$.

定义 3 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，对 $x\in E$，若存在 $\delta>0$，使得 $B(x,\delta)\subset E$，则称 x 为 E 的**内点**，E 的内点全体记为 $\mathring{E}$，称为 E 的**内核**. 又，若 $x\in\bar{E}$ 但 $x\bar{\in}\mathring{E}$，则称 x 为 E 的**边界点**，边界点全体记为 ∂E.

显然，内核定为开集. 上述性质(iii)说明开集就是集合中每个点都是内点的集合.

注 设函数 $f(x)$ 在 $B(x_0,\delta_0)$ 上有定义. 令

$$\omega_f(x_0)=\lim_{\delta\to 0}\sup\{|f(x')-f(x'')|: x',x''\in B(x_0,\delta)\},$$

我们称 $\omega_f(x_0)$ 为 f 在 x_0 处的**振幅**.

定理 4 (i) $\mathbf{R}^1$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间(这里也包括 $(-\infty,a)$, (b,∞) 以及 $(-\infty,\infty)$)的并集；

(ii) $\mathbf{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

注 $\mathbf{R}^n$ 中的开集还有一个重要事实，即 $\mathbf{R}^n$ 中存在由可列个开集构成的开集族 Γ，使得 $\mathbf{R}^n$ 中任一开集均是 Γ 中某些开集的并集.

定义 4 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族. 若对任意的 $x\in E$，存在 $G\in\Gamma$，使得 $x\in G$，则称 Γ 为 E 的一个**开覆盖**. 设 Γ 是 E 的一个开覆盖，若 $\Gamma'\subset\Gamma$ 仍是 E 的一个开覆盖，则称 Γ' 为 Γ(关于 E)的一个**子覆盖**.

引理 $\mathbf{R}^n$ 中点集 E 的任一开覆盖 Γ 都含有一个可数子覆盖.

定理 5 (Heine-Borel 有限子覆盖定理) $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集的任一开覆盖均含有一个有限子覆盖.

定理 6 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 E 的任一开覆盖都包含有限子覆盖，则 E 是有界闭集.

注意，如果 E 的任一开覆盖均包含有限子覆盖，我们就称 E 为**紧集**. 上述两个定理表明，$\mathbf{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) $\mathbf{R}^n$ 中开球 $B(x_0,r)$ 的闭包是闭球 $C(x_0,r)$：

$$\overline{B(x_0,r)}=\{x\in\mathbf{R}^n: |x-x_0|\leqslant r\}.$$

(2) 设 $E=\{\cos n\}$，则 $\overline{E}=[-1,1]$.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是闭集，则 E 是某个可数子集的闭包.

(4) 设 $E\subset(0,\infty)$，且 $E\neq\varnothing$. 若有

$$x/2\in E,\quad \sqrt{x^2+y^2}\in E\quad (x,y\in E),$$

则 $\overline{E}=[0,\infty)$.

证明 (1) 记 $F=\{x\in\mathbf{R}^n: |x-x_0|\leqslant r\}$，易知 F 是闭集，因此 $\overline{B(x_0,r)}\subset F$. 反之，若 $x\in F$，则令 $x_k=x_0/k+(1-1/k)x$，且有

$$|x_0-x_k|=(1-1/k)|x_0-x|\leqslant(1-1/k)r<r,$$

$$|x-x_k|=|x_0-x|/k\leqslant r/k.$$

这说明$\{x_k\}\subset B(x_0,r)$，且有 $x_k\to x\ (k\to\infty)$. 从而可知 $x\in\overline{B(x_0,r)}$，即 $F\subset\overline{B(x_0,r)}$.

(2) 令 $A=\{n+2m\pi: n,m\in\mathbf{Z}\}$，易知对任给 $t\in\mathbf{R}^1$ 以及 $\delta>0$，存在 $a\in A$，使得 $|t-a|<\delta$（见例 4 之(4)）. 从而知 $\bar{A}=\mathbf{R}^1$. 现在设 $x\in[-1,1]$，以及 $\varepsilon>0$，则存在 $t\in\mathbf{R}^1$，使得 $\cos t=x$，且存在 $n,m\in\mathbf{Z}$，使得 $t<n+2m\pi<t+\varepsilon$. 由此得

$$|x-\cos n|=|\cos t-\cos(n+2m\pi)|\leqslant n+2m\pi-t<\varepsilon.$$

(3) 若 E 包含有闭区间，则取此闭区间中的全体有理数；而对非闭区间的点集，则取其邻接区间的端点集. 易知它们都是可数集.

(4) (i) 若 $x_0\in E$，则依题设可推 $x_0/2^n\in E(n\in\mathbf{N})$. 由此知对任给 $\delta>0$，均有 $E\cap(0,\delta)\neq\varnothing$.

(ii) 若 $x_0\in E$，则易知$\sqrt{2x_0^2}\in E$. 从而又有

$$\sqrt{x_0^2+(\sqrt{2x_0^2})^2}=\sqrt{3x_0^2}\in E,\quad\cdots,\quad\sqrt{nx_0^2}\in E,\quad\cdots,$$

即$\sqrt{n}\,x_0\in E(n\in\mathbf{N})$. 证毕.

例 2 试证明下列命题：

(1) 函数 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin(1/y), & y\neq0,\\ 0, & y=0\end{cases}$ 的不连续点集不是闭集.

(2) (i) $F\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，E 是 F 中一个无限子集，则 $E'\cap F\neq\varnothing$. (ii) 若 $F\subset\mathbf{R}^n$ 且对于 F 中任一无限子集 E，有 $E'\cap F\neq\varnothing$，则 F 是有界闭集.

(3) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集，且 $r>0$，则点集 $E=\{t\in\mathbf{R}^n$: 存在 $x\in F$，$|t-x|=r\}$ 是闭集.

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^2$，称 $E_y=\{x\in\mathbf{R}^1: (x,y)\in E\}$为 E 在 $\mathbf{R}^1$ 上的投影(集). 若 $F\subset\mathbf{R}^2$ 是闭集，则 F_y 也是闭集.

证明 (1) 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ 可知，函数 $f(x,y)$在$(0,0)$处连续. 又 $x\neq0,y=0$ 点不是 $f(x,y)$的连续点（注意 $y\to0$ 时 $f(x,y)$无极限），而$(0,0)$是这些不连续点集的极限点. 证毕.

(2) (i) 因为 $E'\neq\varnothing$，且 $E'\subset F'=F$，所以 $E'\cap F\neq\varnothing$. (ii) 首先，指出 F 是闭集：因为若有 $x_n\in F$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则无限子集 $E=\{x_n\}$满足 $E'\cap F\neq\varnothing$，所以 $x_0\in F$，即 F 是闭集. 其次，指出 F 是有界

集：反之，假定 F 是无上界集，则可取 F 的无限子集 $E=\{x_n\}$：$x_n\to+\infty(n\to\infty)$. 从而 $E'=\varnothing$，与题设矛盾. 证毕.

(3) 设 t_0 是 E 的极限点，即存在 $t_n\in E$：$t_n\to t_0(n\to\infty)$. 现在假定 $|t_n-t_0|<\varepsilon$，因为由 E 的定义可知，存在 $x_n\in F(n\in\mathbf{N})$，使得 $|t_n-x_n|=r$，所以可得

$$|x_n-t_0|\leqslant|x_n-t_n|+|t_n-t_0|<2r\quad(n\in\mathbf{N}).$$

因此 $\{x_n\}$ 是有界点列，它有极限点(记为) $x_0\in F$，以及 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$. 由此又知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 k_0，当 $k>k_0$ 时，有

$$|x_0-t_0|\leqslant|x_0-x_{n_k}|+|x_{n_k}-t_{n_k}|+|t_{n_k}-t_0|\leqslant r+2\varepsilon,$$

$$r=|x_{n_k}-t_{n_k}|\leqslant|x_{n_k}-x_0|+|x_0-t_0|+|t_0-t_{n_k}|$$

$$\leqslant|x_0-t_0|+2\varepsilon.$$

根据 ε 的任意性可知，$|t_0-x_0|=r$，即 $t_0\in E$，E 是闭集.

(4) 不妨假定 F 是有界的. 设 $x_n\in F_y(n\in\mathbf{N})$，且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，考查点集 $E=\{(x_n,y_n)\in F\}$，由 F 的有界性可知，存在 $(\bar{x},\bar{y})\in F$，使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\bar{x},\quad \lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\bar{y}.$$

易知 $x_0=\bar{x}$，这说明 x_0 是点 $(\bar{x},\bar{y})$ 的投影，故 F_y 是闭集.

例 3 解答下列问题：

(1) 设 E_1,E_2 是 $\mathbf{R}^1$ 中的非空点集，且 $E_2'\neq\varnothing$，试证明 $\overline{E}_1+E_2'\subset(E_1+E_2)'$.

(2) 设 A,B 是 $\mathbf{R}^1$ 中的点集，试证明 $(A\times B)'=(\overline{A}\times B')\cup(A'\times\overline{B})$.

(3) 设 A,B 是 $\mathbf{R}^1$ 中点集，试问：等式 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 一定成立吗？

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 E 的任一子集均为闭集，试问：是否 E 是有限点集？

(5) (i) 若 $E\subset\mathbf{R}^1$ 中的都是孤立点，试问 E 是闭集吗？(ii) 若 $E\subset\mathbf{R}^1$ 中不含有孤立点，试问 E 是闭、开集吗？

(6) 设 $\{a_n\}\subset\mathbf{R}^1$，作 $E=\{b\in\mathbf{R}^1$：存在 $a_{n_k}\to b(k\to\infty)\}$，试证明 E 是闭集.

解 (1) 设 $P_0=x_0+y_0\in\overline{E}_1+E_2'$，即 $x_0\in\overline{E}_1$，$y_0\in E_2'$，则存在 $x_n\in E_1(n\in\mathbf{N}$，可全同)：$x_n\to x_0(n\to\infty)$；存在 $y_n\in E_2(n\in\mathbf{N})$：$y_n\to$

$y_0(n\to\infty)$. 从而知

(i) 若 $\{x_n+y_n\}$ 是互异点列，则 $x_n+y_n\in E_1+E_2(n\in\mathbf{N})$, $x_n+y_n\to x_0+y_0\in(E_1+E_2)'(n\to\infty)$.

(ii) 若 $\{x_n+y_n\}$ 是相同点列，则考查 $\{x_n+y_{n+1}\}$ 即可.

(2) 证略.

(3) 不一定. 例如 $A=\{1/n\}$, $B=\{-1/n\}$, 则 $A\cap B=\varnothing$. 从而 $\overline{A\cap B}=\varnothing$. 但我们有

$\overline{A}=\{0,1,1/2,\cdots,1/n,\cdots\}$, $\overline{B}=\{0,-1,-1/2,\cdots,-1/n,\cdots\}$.

故 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{0\}$.

(4) (i) 若 E 是无界点集，则 E 不一定是有限点集. 例如 $E=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

(ii) 若 E 是有界点集，则 E 必是有限点集. 这是因为否则在 E 中必有收敛点列 $\{x_k\}$，而这一点列的子集未必均为闭集，所以满足题设条件的有界点集 E 必为有限集.

(5) (i) 注意 $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$. (ii) 注意 $E=Q$.

(6) 设 $c\in E'$，则存在 $b_m\in E(m\in\mathbf{N})$，使得 $\lim\limits_{m\to\infty}b_m=c$. 依题设知存在子列 $\{a_{n_k}^{(m)}\}$ 使得 $a_{n_k}^{(m)}\to b_m(k\to\infty)$. 从而有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}^{(k)}=c$.

例 4 试证明下列命题:

(1) 点集 $E=\{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m}: n,m\in\mathbf{N}\}$ 在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密.

(2) 设 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中无处稠密集列，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中无处稠密集.

(3) 设正数列 $\{a_n\}$: $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}a_n/a_{n+1}=1,$$

则数集 $E=\{a_m/a_n: 1\leqslant n\leqslant m\}$ 在 $(1,\infty)$ 中稠密.

(4) 设 $a\overline{\in}Q$, $E_a=\{p+aq: p,q\in\mathbf{Z}\}$，则有 $\overline{E}_a=\mathbf{R}^1$.

(5) $\mathbf{R}^1$ 中存在着可列个互不相交的稠密可列集.

证明 (1) 对任意的区间 $(a,b)\subset\mathbf{R}^1$，因为 $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\to0(n\to\infty)$，所以存在 n_0，使得 $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}<b-a(n>n_0)$. 取 m_0: $\sqrt[3]{m_0}>\sqrt[3]{n_0}-a$，并作数集

$$A=\{n\in\mathbf{N}: \sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m_0}\leqslant a\}\quad(n_0\in A, A\neq\varnothing),$$

易知 A 是有上界集. 又记 n_1 是 A 中最大值的自然数，且令 $n_2=n_1+1$，我们有

$$\sqrt[3]{n_2}-\sqrt[3]{m_0}>a,\quad \sqrt[3]{n_2}>a+\sqrt[3]{m_0}>\sqrt[3]{n_0}.$$

故得 $n_2>n_0$. 从而知

$$\sqrt[3]{n_2}<\sqrt[3]{n_1}+b-a\leqslant\sqrt[3]{m_0}+a+b-a,$$

即 $a<\sqrt[3]{n_2}-\sqrt[3]{m_0}<b$. 证毕.

(2) 证略.

(3) 反证法. 假定存在 $x_0>1$，以及 $\varepsilon_0>0$，使得

$$|a_m/a_n-x_0|\geqslant\varepsilon_0\quad(1\leqslant n\leqslant m).$$

则由 $a_n/a_{n+1}\to1(n\to\infty)$ 可知，对充分大的 k，存在 $n_k>k$，使得当 $m\leqslant n_k$ 时有 $a_m/a_k<x_0$，而当 $m>n_k$ 时有 $a_m/a_k>x_0$. 从而对每个 k 有

$$\frac{a_{n_k+1}}{a_k}-\frac{a_{n_k}}{a_k}\geqslant2\varepsilon_0,\quad \frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}}-1\geqslant2\varepsilon_0\frac{a_k}{a_{n_k}}>\frac{2\varepsilon_0}{x_0}>0.$$

再令 $k\to+\infty$，则得 $0>0$，矛盾，故结论得证.

(4) 对任意的 $x\in\mathbf{R}^1$，$\delta>0$，取正整数 m：$10^{-m}<\delta$，从而在点集 $\{n\alpha:n=1,2,\cdots\}$ 中必有 $n_1\alpha$ 与 $n_2\alpha$，它们的前 m 个小数相同.

令 k 是数 $n_1\alpha-n_2\alpha$ 的整数部分，则

$$|n_1\alpha-n_2\alpha-k|<10^{-m}<\delta.$$

记 $|(n_1-n_2)\alpha-k|$ 为 $l_1\alpha+l_2(l_1,l_2\in\mathbf{Z})$，则 $0<l_2+l_1\alpha<\delta$. 因此，存在 $z\in\mathbf{Z}$，使得

$$x-\delta<z(l_2+l_1\alpha)<x+\delta.$$

现在，令 $p=l_2z,q=l_1z$，可知 $p+q\alpha\in(x-\delta,x+\delta)$. 证毕.

(5) 设 $\{p_n\}$ 是素数序列，且作数集 $E_n=\mathbf{Q}+\{\sqrt{p_n}\}(n\in\mathbf{N})$，易知 $E_n\cap E_m=\varnothing(n\neq m)$. 这是因为否则就有

$$r'+\sqrt{p_m}=r''+\sqrt{p_n}\quad(r',r''\in\mathbf{Q},r'\neq r'',m\neq n).$$

由此可知 $(r'-r'')^2=(\sqrt{p_n}-\sqrt{p_m})^2$，即

$$\sqrt{p_np_m}=[p_n+p_m-(r'-r'')^2]/2\in\mathbf{Q},$$

导致矛盾. 此外，易知每个 E_n 均为可数稠密集.

例 5 试证明下列命题：

(1) 设$E\subset\mathbf{R}^n$,则$\overline{E}$是包含E的一切闭集F之交:$\overline{E}=\bigcap\limits_{F\supset E}F$.

(2) 设$F\subset\mathbf{R}^n$是无限闭集,则存在可数子集E:$\overline{E}=F$.

(3) $\mathbf{R}^1$不可表示为可数个互不相交的闭区间之并.

(4) 开区间(a,b)不能表示成互不相交的闭集列之并.

(5) $\mathbf{R}^2$不能表示成可列个无公共内点的闭圆盘之并.

证明 (1) (i) 显然,$F\supset E$,故$\bigcap\limits_{F\supset E}F\supset E$.因为$\bigcap\limits_{F\supset E}F$是闭集,所以$\bigcap\limits_{F\supset E}F\supset\overline{E}$. (ii) 由于$\overline{E}$是闭集,故$\overline{E}\supset\bigcap\limits_{F\supset E}F$.从而结论得证.

(2) (i) 对任意的$k\in\mathbf{N}$,作开球列$B_k=\{B(r,1/k),r\in\mathbf{Q}\}(k\in\mathbf{N})$.对$B_k$中的$B=B(r,1/k)$满足$B\cap F\neq\varnothing$的球$B$,取$B\cap F$中的一个点,并记其全体为$A_k$.易知$A_k$是$F$的可数子集,$E\triangleq\bigcup\limits_{k\geqslant 1}A_k$也是$F$的可数子集.因为$F$是闭集,所以$\overline{E}\subset F$.

(ii) 对任意的$x\in F$,以及$k\in\mathbf{N}$,使得x位于开球族B_k中的某个开球B内,且B必含有A_k中的一个点,也必含E中一个点.从而E中某点距离点x小于$2/k$.由k的任意性可知$x\in\overline{E}$,即$F\subset\overline{E}$.

综合(i),(ii),即得所证.

(3) 反证法.假定$\mathbf{R}^1=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n],[a_i,b_i]\cap[a_j,b_j]=\varnothing(i\neq j)$,则$E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\cup\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$是可列闭集.由此可知$E$中必有孤立点,这与假设不合.证毕.

(4) 只需指出:对$(a,b)=I$内的任一互不相交的非空闭集列$\{F_n\}$,必有$(a,b)\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.为此,令

$$a_1=\inf\{x:x\in F_1\},\quad b_1=\sup\{x:x\in F_1\},$$

以及$I_0=(a,a_1)$,$I_1=(b_1,b)$(均非空区间).显然,$(a,a_1)\cap\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}F_n$与$(b_1,b)\cap\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}F_n$均非空集(否则已得证).从而不妨假定$F_2^0=F_2\cap I_0\neq\varnothing,F_2^1=F_2\cap I_1\neq\varnothing$,易知均为闭集.仿照上述对$(a,b)$与$F_1$之推理,以$I_0,I_1$代$I,F_2^0,F_2^1$代$F_1$,又可得到$a_2,b_2$,以及

$$I_{00}=(a,a_2),\quad I_{01}=(a_2,a_1),\quad I_{10}=(b_1,b_2),\quad I_{11}=(b_2,b),$$

且对 F_3，有 $F_3^{00},F_3^{01},F_3^{10},F_3^{11}$ 等非空闭集. 继续这样做下去，可得闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 以及开区间组列 $I_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}$（其中 $\varepsilon_i=0$ 或 1），且有 $I_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=\varnothing$. 作点集

$$E_n=\bigcup_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n\in\{0,1\}}I_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n},$$

不难证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ 的基数为 c.

(5) 反证法. 若结论成立，则可在 $\mathbf{R}^2$ 上取一条直线，它不通过所有闭圆盘之间的切点. 这样，$\mathbf{R}^1$ 就表成了一列互不相交闭集之并，而与(4)矛盾. 证毕.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}^n$ 上，则 $f\in C(\mathbf{R}^n)$ 的充分必要条件是：对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$，点集

$$E_1=\{x\in\mathbf{R}^n:f(x)\geqslant t\},\quad E_2=\{x\in\mathbf{R}^n:f(x)\leqslant t\}$$

都是闭集.

(2) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$，则 $F=\{(x,y):f(x)\geqslant y\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集.

(3) 设 $F\subset(-\infty,\infty)$ 是有界闭集. 若 $f:F\to\mathbf{R}^1$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in F}}f(x)=+\infty\quad(\text{任意 }x_0\in F'),$$

则 F 是可数集.

证明 (1) **必要性** 以 E_1 为例，若有 $\{x_k\}\subset E_1$ 且 $x_k\to x_0(k\to\infty)$，则由 $f(x_k)\geqslant t$ 以及 $f(x)$ 的连续性，可知

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)\geqslant t,$$

即 $x_0\in E_1$.

充分性 采用反证法. 假定存在 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 不是 $f(x)$ 的连续点，则有 $\varepsilon_0>0$ 以及点列 $\{x_k\}$：$x_k\to x_0(k\to\infty)$，使得对每一个 k，有

$$f(x_k)\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0\quad\text{或}\quad f(x_k)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0.$$

不妨认定对一切 x_k，有 $f(x_k)\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0$，那么取 $t=f(x_0)-\varepsilon_0$，可知 $x_k\in E_2$，但 $x_0\overline{\in}E_2$，这与 E_2 是闭集矛盾.

(2) 设 $(x_n,y_n)\in F(n\in\mathbf{N})$，且满足

$$x_n \to x,\quad y_n \to y,\quad (x_n,y_n) \to (x,y)\quad (n \to \infty),$$

则由 $f(x_n) \geqslant y_n$ 可知，$f(x) \geqslant y$（注意 f 连续）. 这说明 $(x,y) \in F$，即 F 是闭集.

(3) 作点集 $F_n = \{x \in F: f(x) \leqslant n\}(n \in \mathbf{N})$，易知 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. 假定 F_{n_0} 是无限集，则存在 $x' \in F'_{n_0}$，且有 $\{x_k\} \subset F_{n_0}$，使得 $x_k \to x'(k \to \infty)$. 从而得

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) \leqslant n_0,\quad x' \in F'.$$

这与题设矛盾，故任一 F_n 均为有限集，即 F 是可数集.

例 7 解答下列问题：

(1) 设 $F \subset \mathbf{R}^1$ 是闭集，试作 $f: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$，使得 $f(x)$ 的不连续点集是 F.

(2) 设 $f: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$，且有 $f(x+y) = f(x) + f(y)(x, y \in \mathbf{R}^1)$. 若 $f(x)$ 至少有一个不连续点，试证明其函数图形集

$$G_f = \{(x, f(x)): x \in \mathbf{R}^1\}$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中稠密.

(3) $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ 为连续函数的充分必要条件是：对任意的闭集 $F \subset \mathbf{R}^1$，$f^{-1}(F)$ 必为闭集.

(4) 试证明 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ 是连续函数的充分必要条件是：对任意的 $E \subset \mathbf{R}^n$，均有 $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

解 (1) 取 F 中的一个可数子集 e，使得 $\bar{e}$，使得 $\bar{e} = F$（见例 5 第(2)题）并作函数 $f(x) = 1(x \in e)$；$f(x) = 0(x \in \mathbf{R}^1 \setminus e)$.

(2) 显然 $y = f(x)$ 不是线性函数，故存在 $x_0 \in \mathbf{R}^1$，使得 $f(x_0) \neq f(1)x_0$. 这一结论等价于：平面 $\mathbf{R}^2$ 上两个向量 $\boldsymbol{A} = (1, f(1))$，$\boldsymbol{B} = (x_0, f(x_0))$ 互相独立. 因此，我们有 $\mathbf{R}^2 = \{\alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B}: \alpha, \beta \in \mathbf{R}^1\}$，而 $\{r'\boldsymbol{A} + r''\boldsymbol{B}: r', r'' \in \mathbf{Q}\}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中稠密. 因为对 $r \in \mathbf{Q}$，总有 $f(rx) = rf(x)$. 而对任意的 $r', r'' \in \mathbf{Q}$，有 $r'\boldsymbol{A} + r''\boldsymbol{B} \in G_f$，证毕.

(3) 必要性 假定 f 连续，且设 F 为闭集，又令 $x_n \in f^{-1}(F)$，$x_n \to x_0 \in (f^{-1}(F))'(n \to \infty)$. 由 $f(x_n) \in F$ 可知 $f(x_0) \in F$，即 $x_0 \in f^{-1}(F)$，$f^{-1}(F)$ 是闭集.

充分性 设 $x_0\in\mathbf{R}^n$，对任给 $\varepsilon>0$，作开区间 $G=(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$，依题设知 $f^{-1}(G)$ 是开集. 因此，x_0 是 $f^{-1}(G)$ 的内点，即存在 $\delta_0>0$，使得 $B(x_0,\delta_0)\subset f^{-1}(G)$. 这说明 $f(x)\in G(x\in B(x_0,\delta_0))$，$f(x)$ 在 x_0 处连续.

(4) **必要性** 假定 f 连续，则易知 $f^{-1}(\overline{f(E)})$ 是闭集. 而由 $f(E)\subset\overline{f(E)}$ 可知，$E\subset f^{-1}(\overline{f(E)})$. 因此，$\overline{E}\subset\overline{f^{-1}(\overline{f(E)})}=f^{-1}(\overline{f(E)})$.

充分性 对任一闭集 $F\subset\mathbf{R}^1$，由题设知，$f(\overline{f^{-1}(F)})\subset\overline{f(f^{-1}(F))}=\overline{F}=F$. 从而得 $f^{-1}(F)$ 是闭集，故 f 连续.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上具有介值性. 若对任意的 $r\in\mathbf{Q}$，点集 $\{x\in\mathbf{R}^1: f(x)=r\}$ 必为闭集，则 $f\in C(\mathbf{R}^1)$.

(2) 设 $f: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，且满足

(i) 若 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是紧集，则 $f(K)$ 是紧集；

(ii) 若 $\{K_i\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中递减紧集列，则 $f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}f(K_i)$，

则 $f\in C(\mathbf{R}^n)$.

(3) 设 $f: [a,b]\to\mathbf{R}^1$，作图形集 $G_f=\{(x,f(x)): x\in[a,b]\}$. 若 G_f 是 $\mathbf{R}^2$ 中的紧集(有界闭集)，则 f 连续.（若 G_f 只是闭集，则结论不真，如 $f(x)=1/x(x\neq 0)$，$f(0)=0$.）

(4) 设定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的二元函数 $f(x,y)$ 满足：

(i) 任意固定 $y_0\in\mathbf{R}^1$，$f(x,y_0)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数；

(ii) 任意固定 $x_0\in\mathbf{R}^1$，$f(x_0,y)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数；

(iii) 对 $\mathbf{R}^2$ 中的任一紧集 K，$f(K)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的紧集，

则 $f\in C(\mathbf{R}^2)$.

(5) 设 $I\subset\mathbf{R}^1$ 是一个区间(不论开、闭均可). 则 $f\in C(I)$ 的充分必要条件是：

(i) 对 I 中的任一子区间 J，$f(J)$ 是一个区间；

(ii) 对任意的 $y\in\mathbf{R}^1$，$f^{-1}(\{y\})$ 是闭集.

(6) 设定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

(i) 若 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是有界集，则 $f(x)$ 在 E 上有界；

(ii) 若 $K\subset\mathbf{R}^1$ 是紧集，则 $f^{-1}(K)$ 是闭集，

则 $f\in C(\mathbf{R}^1)$.

证明 (1) 反证法. 假定 $x_0\in\mathbf{R}^1$ 是 $f(x)$ 的不连续点，即存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，使得

$$|f(x_n)-f(x_0)|>\varepsilon_0,\quad |x_n-x|<1/n.$$

不妨设 $f(x_0)<f(x_0)+\varepsilon_0<f(x_n)(n\in\mathbf{N})$，取 $r\in\mathbf{Q}$: $f(x_0)<r<f(x_0)+\varepsilon$，则由题设知，存在 ξ_n(位于 x_0 与 x_n 之间)，使得 $f(\xi_n)=r$. 现在令 $n\to\infty$，根据点集 $\{x: f(x)=r\}$ 的闭集性，可知 $f(x_0)=r$. 这一矛盾说明 $f\in C(\mathbf{R}^1)$.

(2) 对 $x_0\in\mathbf{R}^n$，$\varepsilon>0$，令 $B_0=B(f(x_0),\varepsilon)$ 以及

$$K_m=\overline{B(x_0,1/m)}\quad (m\in\mathbf{N}),$$

则由(ii)知 $\bigcap_{m=1}^{\infty}f(K_m)=\{f(x_0)\}$. 又由(i)知 $F_m=(\mathbf{R}^n\setminus B_0)\cap f(K_m)$ 是紧集，且 $\{F_m\}$ 是递减列，交集是空集. 从而存在 m_0，使得 $F_{m_0}=\varnothing$. 即

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad |x-x_0|<1/m_0.$$

这说明 x_0 是 $f(x)$ 的连续点，证毕.

(3) 设 $x_n\in[a,b]$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则由 G_f 的有界性可知，存在 $\{x_{n_i}\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty}f(x_{n_i})=\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)\triangleq y_0.$$

从而得 $\lim_{i\to\infty}(x_{n_i},f(x_{n_i}))=(x_0,y_0)$. 再由 G_f 之闭集性可知，$y_0=f(x_0)$. 同理可证 $\underline{\lim}_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

(4) 只需指出 f 在 $(0,0)$ 处连续，并假定 $f(0,0)=0$. 反证法. 若 f 在点 $(0,0)$ 处不连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，以及点列 $\{(x_n,y_n)\}$: $x_n\to0$, $y_n\to0$ $(n\to\infty)$，使得 $|f(x_n,y_n)|\geqslant\varepsilon_0(n\in\mathbf{N})$. 由(i)知，存在 $\delta>0$，使得 $|f(x,0)|<\varepsilon_0/2(|x|<\delta)$. 由此知存在 N，使得

$$|f(x_n,0)|<\varepsilon_0/2\quad (n>N,|x_n|<\delta).$$

然而，对每个 n，$f(x_n,y)$ 是 y 的连续函数，因此根据中值定理，存在 y_n': $0<y_n'<y_n$，使得

$$|f(x_n,y_n')|=n\varepsilon_0/(n+1).$$

由于 $y_n\to0(n\to\infty)$，故 $y_n'\to0(n\to\infty)$，故点集

$$E=\{(x_n,y_n'):n\geqslant N\}\cup\{(0,0)\}$$

是紧集. 依题设知 $f(E)$是紧集,可是我们有

$$f(E)=\{n\varepsilon_0/(n+1):n\geqslant N\}\cup\{0\},$$

且 ε_0 是 $f(E)$的极限点,而 $\varepsilon_0\overline{\in}f(E)$,矛盾. 证毕.

(5) **必要性** 显然.

充分性 反证法. 假定 $x_0\in I$ 是 f 的不连续点,则 $\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)<\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)$. 取 y_0 满足

$$\varliminf_{x\to x_0}f(x)<y_0<\varlimsup_{x\to x_0}f(x),\quad y_0\neq f(x_0),$$

由此知存在$\{x_n'\}$: $x_n'\to x_0(n\to\infty)$,使得$f(x_n)>y_0(n\in\mathbf{N})$;同理有$\{x_n''\}$: $x_n''\to x_0(n\to\infty)$,使得 $f(x_n'')<y_0(n\in\mathbf{N})$.

记位于 x_n' 与 x_n'' 之间的 $f^{-1}(y_0)$之点集为 E_n(注意,以 x_n',x_n'' 为端点的区间之 f 的像集是一个区间),$E_n\neq\varnothing$. 因此 x_0 必为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 的极限点,而 $f(x_0)\neq y_0$,即 $f^{-1}(y_0)$不是闭集,矛盾. 这说明 $f\in C(I)$.

(6) 只需指出: 当 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是闭集时,$f^{-1}(F)$是闭集即可. 为此,设$\{x_n\}\subset f^{-1}(F)$: $x_n\to x_0(n\to\infty)$,且令 $y_n=f(x_n)$,则$\{y_n\}\subset F$,且由(i)知$\{y_n\}$是有界列. 从而存在子列$\{y_{n_k}\}$: $y_{n_k}\to y_0(k\to\infty)$,且 $y_0\in F$. 由此知 $K=\{y_0,y_{n_1},y_{n_2},\cdots\}$是紧集. 因此由(ii)知$f^{-1}(K)$是闭集. 注意到$\{y_{n_k}=f(x_{n_k})\}$,$\{x_{n_k}\}\subset f^{-1}(K)$,且 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$,即知 $x_0\in f^{-1}(K)$,随之有 $x_0\in f^{-1}(F)$. 这说明$f^{-1}(F)$是闭集.

例 9 试证明下列命题:

(1) 设 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是有界闭集,f: $F\to F$. 若有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\quad x,y\in F,$$

则存在 $x_0\in F$,使得 $f(x_0)=x_0$. (不动点)

(2) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$,$\{F_k\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中的递减紧集列,则

$$f\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\Big)=\bigcap_{k=1}^{\infty}f(F_k).$$

(3) 设$\{f_n(x)\}$是$[0,1]$上非负连续函数列,且满足

$$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots\geqslant f_n(x)\geqslant\cdots,\quad x\in[0,1],\qquad(*)$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)(0\leqslant x\leqslant 1),\quad M=\sup\{f(x):0\leqslant x\leqslant 1\},$$
则存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=M$.

证明 (1) 作函数 $g(x)=|x-f(x)|$，易知 $g\in C(F)$，从而问题归结为阐明存在 $x_0\in F$，使得 $g(x_0)=0$.

采用反证法. 假定 $g(x)>0\ (x\in F)$，则存在 $\xi\in F$，使得
$$0<g(\xi)=l=\inf_{x\in F}\{g(x)\},$$
但我们有
$$g(f(\xi))=|f(\xi)-f(f(\xi))|<|\xi-f(\xi)|=l,$$
其中 $f(\xi)\in F$. 这一矛盾说明 $f(x)$ 在 F 中存在不动点.

(2) 只需指出 $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\right)\supset\bigcap_{k=1}^{\infty}f(F_k)$. 设 y 属于右端，则对任意的 k，有 $y\in f(F_k)$，或说有 $x_k\in F_k$，$y=f(x_k)(k\in\mathbf{N})$. 不妨设 $x_k\to x_0(k\to\infty)$，则 $x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$. 根据 f 的连续性可知，$y=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，这说明 $y\in f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\right)$.

(3) 对任给 $\varepsilon>0$，作点集 $E_\varepsilon=\{x\in[0,1]:f(x)\geqslant M-\varepsilon\}$，则 $f(x)\geqslant M-\varepsilon$ 当且仅当对每个 n，均有 $f_n(x)\geqslant M-\varepsilon$. 故
$$E_\varepsilon=\bigcap_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}([M-\varepsilon,\infty)),$$
即 E_ε 是非空闭集. 若 $\{\varepsilon_i\}$ 是有限多个正数，自然有 $\bigcap_{i\geqslant 1}E_{\varepsilon_i}=E_{\min\{\varepsilon_i\}}\neq\varnothing$. 从而知一切 E_ε 之交集非空. 令 x_0 属于此交集，我们有 $M\geqslant f(x_0)\geqslant M-\varepsilon$. 由 ε 的任意性，结论得证.

注 若将条件(*)改为：对 $x\in[0,1]$，均存在 n_x，使得 $f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)(n\geqslant n_x)$，则结论不真. 例如，取 $f_n(x)=\min\{nx,1-x\}$.

例 10 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则 $\mathring{E}=(\overline{E^c})^c$，$\partial E=\overline{E}\setminus\mathring{E}$，$\partial E^c=\partial E$.

(2) 开区间 $(0,1)$ 不是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集.

(3) 试证明 $G\subset\mathbf{R}^n$ 是开集当且仅当 $G\cap\partial G=\varnothing$；$F\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集当且仅当 $\partial F\subset F$.

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $E\neq\varnothing$，$E\neq\mathbf{R}^n$，则 $\partial E\neq\varnothing$.

(5) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则 $\{x\in\mathbf{R}^n: \omega_{\chi_E}(x)>0\}=\partial E$.

证明 (1),(2) 证略.

(3) 后一结论证明如下：

必要性　若 $x_0\in\partial F$，则对任一 $\delta>0$，存在 $\{x_n\}\subset F$ 且 $x_n\in B(x_0,\delta)$. 由此知 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 因为 F 是闭集，所以 $x_0\in F$.

充分性　设 $x_0\in F'$，则存在 $\{x_n\}\subset F$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 易知 $x_0\in F$，因为否则 $x_0\in\partial F$，而 $\partial F\subset F$，所以 $x_0\in F$. 矛盾. 证毕.

(4) 反证法. 若 $\partial E=\varnothing$，则 $\overline{E}=\mathring{E}$，即 E 既是闭集又是开集. 从而 $E=\varnothing$ 或 $E=\mathbf{R}^n$（否则，就有 $x'\in E$，$x''\overline{\in}E$，作连接 x'，x''之直线段，则在此直线段上有一点 x_0，使得线段 $x'x_0\in E$，$x_0x''\overline{\in}E$. 而 x_0 既不能属于 E，又不能属于 E^c，矛盾），与题设矛盾.

(5) 设 $x_0\in\partial E=\overline{E}\cap\overline{(\mathbf{R}^n\setminus E)}$，则对任意的 $\delta>0$，$B(x_0,\delta)$必含 E 以及 $\mathbf{R}^n\setminus E$ 的点. 因此函数 $\chi_E(x)$在 $x=x_0$ 处的振幅 $\omega_{\chi_A}(x_0)=1$. 这说明$\{x\in\mathbf{R}^n: \omega_{\chi_E}(x)>0\}\supset\partial E$.

又假设 $\omega_{\chi_E}(x_0)>0$，即对任意的 $\delta>0$，有

$$\sup\{|\chi_E(x_0)-\chi_E(x)|: x\in B(x_0,\delta)\}>0\}.$$

因此，$B(x_0,\delta)$必含有 E 以及 $\mathbf{R}^n\setminus E$ 的点，即 $x_0\in\partial E$.

例 11　试证明下列命题：

(1) 设 $G_1,G_2\subset\mathbf{R}^n$ 是两个开集，且 $G_1\cap G_2=\varnothing$，则 $\overline{G}_1\cap G_2=\varnothing$.

(2) $G\subset\mathbf{R}^n$ 是开集当且仅当对任意的 $E\subset\mathbf{R}^n$，均有 $G\cap\overline{E}\subset\overline{G\cap E}$.

(3) 若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是孤立点集，则存在开集 G，闭集 F，使得 $E=G\cap F$.

(4) 设 $G\subset\mathbf{R}^n$ 是非空开集，$r_0>0$. 若对任意的 $x\in G$，作闭球 $\overline{B(x,r_0)}$，则 $A=\bigcup\limits_{x\in G}\overline{B(x,r_0)}$是开集.

(5) 设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集，G 是 $\mathbf{R}^n$ 中开集且 $F\subset G$，则存在 $\delta>0$，使得当$|x|<\delta$ 时，有

$$F+\{x\}\triangleq\{y+x: y\in F\}\subset G.$$

证明 (1) 反证法. 假定 $\overline{G}_1\cap G_2\neq\varnothing$，即存在 $x_0\in\overline{G}_1\cap G_2$，由于 $G_1\cap G_2=\varnothing$，故 $x_0\in\overline{G}_1\setminus G_1\subset G_1'$. 但 x_0 是 G_2 之内点，因此存在 $\delta_0>0$，使得 $B(x_0,\delta_0)\subset G_2$，$B(x_0,\delta_0)\cap G_1=\varnothing$. 从而得 $x_0\overline{\in}G_1'$，导致矛盾，即得所

证.

(2) 必要性　设 G 是开集. 若 $x_0\in G\cap\overline{E}$, 则 $x_0\in G$ 且 $x_0\in\overline{E}$. 故存在 $\delta_0>0$, 使得 $\overline{B(x_0,\delta_0)}\triangleq\overline{B_0}\subset G$. 如果 $x_0\in E$, 那么 $x_0\in G\cap E\subset\overline{G\cap E}$, 得证; 如果 $x_0\in E'$, 那么存在 $\{x_n\}\subset E$: $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 从而知存在 n_0, $x_n\in\overline{B_0}(n\geqslant n_0)$, 这说明 $x_0\in\overline{G\cap E}$.

充分性　若对任意的 $E\subset\mathbf{R}^n$, 有 $G\cap\overline{E}\subset\overline{G\cap E}$, 则取 $E=\mathbf{R}^n\setminus G$, 可得 $G\cap\overline{\mathbf{R}^n\setminus G}\subset\overline{G\cap(\mathbf{R}^n\setminus G)}=\varnothing$. 因此, 如果 $x\in\overline{\mathbf{R}^n\setminus G}$, 就有 $x\in\mathbf{R}^n\setminus G$. 这说明 $\mathbf{R}^n\setminus G$ 是闭集, 而 G 是开集.

(3) 因为 $F\triangleq\overline{E}$ 是闭集, $G\triangleq(E')^c$ 是开集, 又由题设知 $E\cap E'=\varnothing$, 所以我们有

$$F\cap G=\overline{E}\cap(E')^c=(E\cap(E')^c)\cup(E'\cap(E')^c)=E.$$

(4) 设 $x_0\in A$, 则存在 $x'\in G$, 使得 $x_0\in\overline{B(x',r_0)}$. 注意到 G 是开集, 故存在 $\delta'>0$, 使得 $B(x',\delta')\subset G$. 再取 $x''\in B(x',\delta')$ 且 $x'\neq x''$ 以及 $|x''-x_0|<r_0$, 从而有 $x_0\in B(x'',r_0)\subset A$. 由此易知, 存在 $\delta_0>0$, 使得 $B(x_0,\delta_0)\subset A$, 即 A 是开集.

(5) 对于任意的 $y\in F$, 由于 $y\in G$, 故知存在 $\delta_y>0$, 使得 $B(y,\delta_y)\subset G$. 因为 $\{B(y,\delta_y/2): y\in F)\}$ 组成 F 的一个开覆盖, 所以根据有限子覆盖定理, 存在 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in F$, 使得

$$F\subset\bigcup_{k=1}^{m}B\left(y_k,\frac{\delta_{y_k}}{2}\right).$$

于是, 每一个 $y\in F$ 至少属于某个 $B(y_k,\delta_{y_k}/2)$, 且 y 与 G^c 中的任一点 z 之间的距离为

$$|y-z|\geqslant|z-y_k|-|y_k-y|>\delta_{y_k}-\delta_{y_k}/2=\delta_{y_k}/2.$$

现在取

$$\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_{y_1},\delta_{y_2},\cdots,\delta_{y_m}\},$$

则当 $|x|<\delta$ 时有 $y+x\in G$, 即 $F+\{x\}\subset G$.

例 12　试证明下列命题:

(1) $\mathbf{R}^2$ 中的开集全体之基数是 c.

(2) 设 $\{F_\alpha: \alpha\in I=(0,1)\}$ 是一族闭区间, 则点集 $E=$

$\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in I} \mathring{F}_\alpha$ 是可数集.

(3) 设 $\Gamma=\{[a_\alpha,b_\alpha]\colon \alpha\in I=[c,d]\}$. 若 Γ 中任两个元即两个闭区间必相交,则 $\bigcap_{\alpha\in I}[a_\alpha,b_\alpha]\neq\varnothing$.

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$. 若对任意的 $x,y\in E$,均有 $(x+y)/2\in E$,且 $\mathring{E}\neq\varnothing$,则 E 是一个区间.

证明 (1) 已知 $\mathbf{R}^2$ 中的二进半开闭方体全体是可列集,而任一开集均与一列半开闭二进方体对应,即得所证.

(2) 因 $\bigcup_{\alpha\in I}\mathring{F}$ 是开集,故可用构成区间表示为 $\bigcup_{\alpha\in I}\mathring{F}_\alpha=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$,其中 α_n,β_n 不属于 $\bigcup_{\alpha\in I}\mathring{F}_\alpha$. 现在,对任意的 $x\in E$,均存在 $\alpha\in I$,使得 $x\in F_\alpha$, $x\overline{\in}\mathring{F}_\alpha$. 我们取 n_0,使得 $\mathring{F}_\alpha\subset(\alpha_{n_0},\beta_{n_0})$. 若 $F_\alpha\subset(\alpha_{n_0},\beta_{n_0})$,则 $x\overline{\in}F_\alpha$,矛盾. 因此,$x=\alpha_{n_0}$ 或 β_{n_0}. 从而有

$$\bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha\setminus\bigcup_{\alpha\in I}\mathring{F}_\alpha\subset\bigcup_{n\geqslant1}\{\alpha_n,\beta_n\}.$$

即得所证.

(3) 取定 $[a_{\alpha_0},b_{\alpha_0}]\in\Gamma$,则对任意的 $\alpha\in I$,均有 $[a_\alpha,b_\alpha]\cap[a_{\alpha_0},b_{\alpha_0}]\neq\varnothing$. 易知 $a_\alpha\leqslant b_{\alpha_0}(\alpha\in I)$,这说明 Γ 中所有的元(闭区间)的左端点全体形成一个有上界的点集. 现在记 $M=\sup\{a_\alpha\colon[a_\alpha,b_\alpha],\alpha\in I\}$,下面指出,$M\in\bigcap_{\alpha\in I}[a_\alpha,b_\alpha]$: 对任一闭区间 $[a_\alpha,b_\alpha]$,必有 $a_\alpha\leqslant M$. 如果存在 $[a_{\alpha'},b_{\alpha'}]\in\Gamma$,使得 $b_{\alpha'}<M$,那么令 $M-b_{\alpha'}=\varepsilon>0$,由 M 之定义可知,存在 $[a_{\alpha''},b_{\alpha''}]\in\Gamma$,使得 $a_{\alpha''}>M-\varepsilon>b_{\alpha'}$. 从而我们有

$$[a_{\alpha'},b_{\alpha'}]\cap[a_{\alpha''},b_{\alpha''}]=\varnothing,$$

矛盾. 即得 $b_\alpha\geqslant M(\alpha\in I)$,证毕.

(4) (i) 应用归纳法可以推得: 若 $x,y\in E$ 且 $k=0,1,2,\cdots,2^n$,则得

$$kx/2^n+(1-k/2^n)y\in E\quad(n\in\mathbf{N}).$$

(ii) 由题设可以假定 $E\supset[p,q]$,且 $a\in E$, $a>p$. 令 $c=\sup\{x\colon x>p$ 且 $[p,x]\subset E\}$,显然 $[p,c)\subset E$. 若 $c<a$,则可取 $a_0\in E$,使得 $c<a_0$ 以

及$(p+a_0)/2<c$. 从而得

$$E \supset \left\{\frac{(x+a_0)}{2}: x \in (p,c)\right\} = \left(\frac{p+a_0}{2}, \frac{c+a_0}{2}\right).$$

因此,$E\supset[p,(c+a_0)/2)$,但$c<(c+a_0)/2$,矛盾. 故我们有$a\leqslant c$,这说明$E\supset[p,a]$,即E中比p大的点均落在以p为左端点的区间内. 同理可证E中比q小的点均属于一个以q为右端点的区间. 证毕.

例 13 试证明下列命题:

(1) 设$f\in C(\mathbf{R}^1)$,且当$G\subset\mathbf{R}^1$是开集时,$f(G)$必是开集,则$f(x)$是严格单调函数.

(2) 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^1$上的单调上升函数,则点集

$$E=\{x: \text{对于任意的 } \varepsilon>0, \text{有 } f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)>0\}$$

是$\mathbf{R}^1$中的闭集.

(3) 设$P(x,y)=\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}x^iy^j$是$x,y$的二元非零多项式,则点集$E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: P(x,y)=0\}$无内点.

证明 (1) 考查开区间$(a,b)\subset\mathbf{R}^1$. 因为$f((a,b))$是开集,所以$f(x)$在$[a,b]$上的最大、最小值必在端点a,b上取到. 假定$f(a)<f(b)$,则对于$a<x<b$,必有$f(a)<f(x)<f(b)$.

(2) 考查点集$\mathbf{R}^1\setminus E=\{x\in\mathbf{R}^1: \text{存在 } \varepsilon, f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)=0\}$,易知若$x_0\in\mathbf{R}^1\setminus E$,则存在$\varepsilon_0>0$,使得

$$f(x_0+\varepsilon_0)=f(x_0-\varepsilon_0)\leqslant f(x)\leqslant f(x_0+\varepsilon_0), \quad |x-x_0|\leqslant\varepsilon_0.$$

这说明$f(x)$在$(x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0)$上是一个常数,$x_0$是内点,$\mathbf{R}^1\setminus E$是开集,即$E$是闭集.

(3) 注意,若$\mathring{E}\neq\varnothing$,则存在$(x_0,y_0)\in\mathring{E}$,以及$\delta_0>0$,使得$(x,y)\in E$,即$P(x,y)=0\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right)$. 从而知$P(x,y)\equiv0$,矛盾.

例 14 试证明下列命题:

(1) 设$f(x)$定义在$\mathbf{R}^n$上,则$f\in C(\mathbf{R}^n)$的充分必要条件是:对任意的$t\in\mathbf{R}^1$,点集

$$E_1=\{x\in\mathbf{R}^n: f(x)>t\}, \quad E_2=\{x\in\mathbf{R}^n: f(x)<t\}$$

都是开集.

(2) 若 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集且 $f(x)$ 定义在 G 上，则对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$，点集

$$H=\{x\in G:\omega_f(x)<t\}$$

是开集.

(3) 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，且 $\overline{A}\cap B=\varnothing=\overline{B}\cap A$，则存在开集 G_A,G_B: $G_A\supset A,G_B\supset B$，且 $G_A\cap G_B=\varnothing$.

(4) 设 $G\subset(-\infty,\infty)$ 是无上界开集，则存在 $x_0>0$，使得 G 包含无穷多个形如 $nx_0(n\in\mathbf{N})$ 之点.

证明 (1) 证略.

(2) 不妨设 $H\neq\varnothing$. 对于 H 中的任一点 x_0，因为 $\omega_f(x_0)<t$，所以存在 $\delta_0>0$，使得 $B(x_0,\delta_0)\subset G$，且有

$$\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x_0,\delta_0)\}<t.$$

现在对于 $x\in B(x_0,\delta_0)$，可以选取 $\delta_1>0$，使得

$$B(x,\delta_1)\subset B(x_0,\delta_0).$$

显然有

$$\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x,\delta_1)\}<t.$$

从而可知 $\omega(x)<t$，即

$$B(x_0,\delta_0)\subset H.$$

这说明 H 中的点都是内点，H 是开集.

(3) 由题设知，开集 $\overline{A}^c\supset B$，开集 $\overline{B}^c\supset A$. 从而对任意的 $x\in\overline{A}$，可作 $B(x,\delta_x)\cap B=\varnothing$，以及 $B(x,\delta_x)\subset\overline{B}^c$. 令 $G_A=\bigcup\limits_{x\in A}B(x,\delta_x)$，则 G_A 是 $\overline{B}^c$ 内的开集. 易知 $G_A\supset A$ 且 $G_A\cap B=\varnothing$.

对 $t\in\overline{B}$，作 $B(t,\delta_t)\cap A=\varnothing$，且使 $B(t,\delta_t)\subset\overline{A}^c$. 我们记 $G_B=\bigcup\limits_{t\in B}B(t,\delta_t)$，$G_B$ 是开集且 $G_B\supset B,G_B\cap A=\varnothing$.

(4) (i) 若 $0<p<q$，则易知存在 r，使得

$$[r,\infty)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(np,nq).$$

(ii) 对 $m\in\mathbf{N}$，依题设知存在 $x_1\in(0,q)$，以及自然数 n_1: $n_1>m$，$n_1x_1\in G$. 因此，存在闭区间 $[p_1,q_1]\subset[p,q]$，使得

$$n_1x\in G\quad(\text{对任意的 }x\in[p_1,q_1]).$$

再以$[p_1,q_1]$替换$[p,q]$的角色，以 n_1 替换 m 的角色，重复上述推理过程，可得

$$[p_2,q_2]\subset[p_1,q_1];\quad n_2x\in G\ (n_2>n_1,x\in[p_2,q_2]).$$

继续这一过程，我们有闭区间套列$\{[p_n,q_n]\}$，其公共交点即为所求.

例 15 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可微. 若对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}^1$，点集 $F=\{x\in\mathbf{R}^1: f'(x)=\lambda\}$总是闭集，则$f'(x)$是连续函数.

(2) 设 $f\in C([a,b])$，并作(右升)点集

$$G=\{x\in(a,b):\ 存在\ \xi:\ \xi>x,f(\xi)>f(x)\},$$

则 G 是开集. 又若(α,β)是 G 的构成区间，则 $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$.

(3) 试作$(0,1)$上函数 $f(x)$，使得对任意的非空开集 $G\subset(0,1)$，G 均含有 $f(x)$的 c 个连续点以及 c 个不连续点.

(4) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$. 若存在 $\lambda>0$，使得

$$|f(x)-f(y)|\geqslant\lambda|x-y|\quad(x,y\in\mathbf{R}^1),$$

则值域 $R(f)=\mathbf{R}^1$.

证明 (1) 由题设知点集

$$G=G_1\cup G_2\triangleq\{x\in\mathbf{R}^1: f'(x)>\lambda\}\cup\{x\in\mathbf{R}^1: f'(x)<\lambda\}$$

是开集，且根据 $f'(x)$具有中值性，故 G_1,G_2 均为开集，由此知 $f'(x)$是连续函数.

(2) 显然，G 是开集. 现在，对 $x\in(\alpha,\beta)$，作

$$E_x=\{t\in[x,\beta]:\ f(t)\geqslant f(x)\},$$

易知 E_x 中有最大点，记为 x_1. 若 $x_1<\beta$，则由 $x_1\in E_x$ 可得 $\beta\overline{\in}E_x$. 因此，$f(\beta)<f(x)\leqslant f(x_1)$. 因为 $\alpha<x_1<\beta$，所以 $x_1\in G$. 即存在 ξ：$\xi>x_1$，使得 $f(\xi)>f(x_1)$.

(i) $x_1<\xi\leqslant\beta$. 由于 $\xi\overline{\in}E_x$，$f(\xi)<f(x)$，故知 $f(x_1)<f(x_1)$. 这不能成立.

(ii) $\xi>\beta$. 由于 $\beta\overline{\in}E_x$，故 $f(\xi)<f(\beta)$，也推出 $f(x_1)<f(x_1)$而不能成立.

这说明 $x_1=\beta$，从而 $f(x)\leqslant f(\beta)(\alpha<x<\beta)$. 若令 $x\to\alpha+$，我们有

$$f(\alpha)=f(\alpha+)\leqslant f(\beta).$$

(3) 对每个 $x\in(0,1)$，作二进位小数展开式：$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，且

令函数为

$$f(x)=\begin{cases}1/(n+1), & x\text{ 展式中出现 } n\text{ 个 } 1,\\ 0, & x\text{ 展式中出现无穷多个 } 1.\end{cases}$$

(4) (i) 设 $y_k=f(x_k)\to y_0(k\to\infty)$，则由

$$|f(x_n)-f(x_m)|\geqslant\lambda|x_n-x_m|\quad(x_n,x_m\in\mathbf{R}^1)$$

可知，$\{x_k\}$是 Cauchy 列. 从而我们有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$，即 $y_0=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=f(x_0)$. 这说明$R(f)$ 是闭集.

(ii) 由题设知 f 是一一映射. 因此，$f(x)$是严格单调函数，且$R(f)$是开集.

因为 $R(f)$既是闭集又是开集，故 $R(f)=\mathbf{R}^1$.

例 16 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in C([0,\infty))$. 若对任意的 $x>0$，存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)$，则存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

(2) 设 $f\in C^{(1)}([a,b])$. 若不存在 $x\in[a,b]$，使得 $f(x)=f'(x)=0$，则存在 $g\in C^{(1)}([a,b])$，使得

$$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)>0\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

(3) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$且是一一映射，又有 $x_0\in\mathbf{R}^1$，使得 $f(x_0)=x_0$. 若成立等式

$$f(2x-f(x))=x\quad(x\in\mathbf{R}^1),$$

则 $f(x)\equiv x$.

证明 (1) 反证法. 假定不存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则存在 a,b：$a<b$，使得点集

$$G_a=\{x>0: f(x)<a\},\quad G_b=\{x>0: f(x)>b\}$$

是无界集. 因为 G_a,G_b 是开集，所以存在 x_0，使得 G_a,G_b 含有无穷多个形如 $nx_0(n\in\mathbf{N})$的点. 由此知不存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx_0)$. 这与题设矛盾. 证毕.

(2) 作点集 $E=\{x\in[a,b]: f(x)=0\}$，若 E 是无穷点集，则存在 $x_0\in E'$，使得 $f(x_0)=f'(x_0)=0$. 这与题设矛盾，故 E 是有限集. 由此知存在多项式 $P(x)$，使得 $f'(x)P(x)=-1(x\in E)$. 从而有开集 $G\supset E$，使得

$$f(x)P'(x) - f'(x)P(x) > 0 \quad (x \in G).$$

对 $\lambda>0$,作函数 $g_\lambda(x)=xf(x)+\lambda P(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则

$$f(x)g_\lambda'(x) - f'(x)g_\lambda(x)$$
$$= f^2(x) + \lambda[f(x)P'(x) - f'(x)P(x)].$$

易知当 $x\in G$ 时,上述表示式是正的.因为 $f(x)P'(x)-f'(x)P(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界函数,所以对于充分小的 λ 值,$f(x)g_\lambda'(x)-f'(x)g_\lambda(x)$ 在 $[a,b]\setminus G$ 上是正值.

(3) 首先,作点集 $F=\{x\in \mathbf{R}^1: f(x)=x\}$,且假定 $F\neq \mathbf{R}^1$,则设 $t\overline{\in} F$,则存在 $r\neq 0$,使得 $f(t)=t+r$.因为 f 是一一映射,且有 $f[2x-f(x)]=x$,所以得到

$$f[2(t+r) - f(t+r)] = t + r = f(t),$$
$$2t + 2r - f(t+r) = t, \quad f(t+r) = (t+r) + r.$$

假定对 $k\in \mathbf{N}$,有 $f(t+kr)=(t+kr)+r$,则根据

$$f[2(t+(k+1)r) - f(t+(k+1)r)]$$
$$= t + (k+1)r = f(t+kr)$$

可知(注意一一对应性质),

$$2t + 2(k+1)r - f[t+(k+1)r] = t + kr,$$
$$f[t+(k+1)r] = t + (k+1)r + r.$$

依归纳法,这说明对任意的 n 均有

$$f(t+nr) = (t+nr) + r.$$

其次,因为 F 是闭集,所以可设 $x_0\in F$ 是 F 的边界点.如果存在 $x\in \mathbf{R}^1$,$f(x)\neq x$,那么令 $\varepsilon=|f(x)-x|>0$,存在 $\varepsilon/4\geqslant\delta>0$,使得

$$|f(s) - f(x)| < \varepsilon/4 \quad (|s-x| < \delta).$$

此外又存在 η: $0<\eta<\delta$,使得 $|f(\omega)-f(x_0)|<\delta$ $(|\omega-x_0|<\eta)$.

现在取 $t\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$,使得 $f(t)\neq t$,则有

$$0 < |f(t) - t| \leqslant |f(t) - f(x_0)| + |f(x_0) - t|$$
$$= |f(t) - f(x_0)| + |x_0 - t| < \delta + \eta < 2\delta.$$

令 $r=f(t)-t$,由于 $0<|r|<2\delta$,故存在 n,使得 $t+nr\in(x-\delta,x+\delta)$.但是 $f(t+nr)=(t+nr)+r$.因此有

$$\varepsilon = |f(x) - x| \leqslant |f(x) - f(t+nr)| + |f(t+nr) - x|$$
$$<\varepsilon/4 + |(t+nr) + r - x| \leqslant \varepsilon/4 + |(t+nr) - x| + |r|$$

$$<\varepsilon/4+\delta+2\delta<\varepsilon/4+\varepsilon/4+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

导致矛盾. 即必有 $f(x)\equiv x$.

例 17 试证明下列命题：

(1) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在 $I=(-R,R)$ 上收敛，且令 $E=\left\{x\in I:\ \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right\}$. 若 $E'\cap I\neq\varnothing$，则 $a_n=b_n(n=0,1,2,\cdots)$.

(2) 设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 是 n 次多项式 $P(x)$ 的 n 个不同实根，$\lambda>0$ 并作点集

$$E=\{x\in\mathbf{R}^1:\ P'(x)/P(x)>\lambda\},$$

则 E 是有限个互不相交的区间之并集，且这些区间的总长度为 n/λ.

证明 (1) 记 $c_n=a_n-b_n(n=0,1,2,\cdots)$，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，则 $f(x)=0(x\in E)$. 又记 $A=E'\cap I$，$B=I\setminus A$，易知 B 是开集，且 $I=A\cup B$.

设 $x_0\in A$，则将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 展开为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n,\quad |x-x_0|<R-|x_0|.$$

若存在最小的自然数 k，使得 $d_k\neq0$，则我们有

$$f(x)=\sum_{n=k}^{\infty}d_n(x-x_0)^n=(x-x_0)^k\cdot g(x),$$

$$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}d_{k+m}(x-x_0)^m,\quad |x-x_0|<R-|x_0|.$$

因为 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，$g(x_0)=d_k\neq0$，所以存在 $\delta>0$，使得 $|g(x)|\neq0(|x-x_0|<\delta)$. 从而有 $f(x)\neq0$，这与 $x_0\in E'$ 矛盾，故有 $d_n=0(n=0,1,2,\cdots)$. 这说明 $f(x)=0(|x-x_0|<R-|x_0|)$，即 A 是开集. 由此又知，$B=\varnothing$. 注意到 $f\in C(I)$，故有 $A\subset E$，$E=I$. 最后，我们得出：$f(x)=0(x\in I)$，即 $c_n=0$，证毕.

(2) 因为我们有

$$f(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x-x_i},$$

$$f'(x)=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(x-x_i)^2}<0,$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{n-1},x_n)$ 上递减. 易知在 $(-\infty,x_1)$ 上 $f(x)<0$，而在 $(x_1,x_2),\cdots(x_{n-1},x_n)$ 上，$f(x)$ 之值都从接近 $+\infty$ 到接近 $-\infty$. 因此存在

$$t_k\in(x_k,x_{k+1})\quad(k=1,2,\cdots,n-1),\quad t_n\in(x_n,\infty),$$

$$f(t_1)=f(t_2)=\cdots=f(t_n)=\lambda,$$

即 $t_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是方程 $\lambda P(x)-P'(x)=0$ 的根.

因为若令 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则易知

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1/a_0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}t_k=\frac{na_0-\lambda a_1}{\lambda a_0}=\frac{n}{\lambda}-\frac{a_1}{a_0}.$$

所以可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}(t_k-x_k)=n/\lambda$.

例 18 试证明下列命题：

(1) 设闭集 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是一族半开闭区间的并集：$F=\bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma}(a_\lambda,b_\lambda]$，则 F 是其中可数个半开闭区间之并.

(2) $\mathbf{R}^2$ 中的开圆 G 不能表示成可列个互不相重闭圆盘之并.

(3) 设有 $\mathbf{R}^1$ 中的闭集 F 以及开集列 $\{G_n\}$. 若对每个 n，$G_n\cap F$ 在 F 中稠密，则 $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap F$ 在 F 中稠密.

证明 (1) 记 $G=\bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma}(a_\lambda,b_\lambda)$，由于 G 是开集，故 G 是可数个构成区间的并集，且每个构成区间均含于某个 (a_λ,b_λ) 之中. 从而存在 $\{\lambda_n\}$，使得 $G=\bigcup\limits_{n\geqslant1}(a_{\lambda_n},b_{\lambda_n})$.

记 $\Gamma_0=\{\lambda:\ b_\lambda\overline{\in}G\}$，若有 $(a_{\lambda'},b_{\lambda'}]\subset(a_\lambda,b_\lambda]$，则我们可将 $(a_{\lambda'},b_{\lambda'}]$ 从并集中舍去. 易知当 $\lambda',\lambda''\in\Gamma_0$ 且 $\lambda'\neq\lambda''$ 时，有 $(a_{\lambda'},b_{\lambda'}]\cap(a_{\lambda''},b_{\lambda''}]=\varnothing$（否则，$b_{\lambda'}$ 或 $b_{\lambda''}\in G$）. 注意到不交区间是至多可列个，故 Γ_0 是可数集. 从而我们有

$$F=\left(\bigcup_{\lambda\in\Gamma_0}(a_\lambda,b_\lambda]\right)\cup\left(\bigcup_{n\geqslant1}(a_{\lambda_n},b_{\lambda_n}]\right).$$

(2) 证略(类似命题前面已解过).

(3) 任取 $x\in F$,记 $I=(x-\delta,x+\delta)(\delta>0)$. 由于 $G_1\cap F$ 在 F 中稠密,故存在 $[a_1,b_1]$,使得

$$[a_1,b_1]\subset I\cap G_1,\quad (a_1,b_1)\cap F\neq\varnothing.$$

对 G_2 以及 (a_1,b_1),同理可知存在 $[a_2,b_2]$,使得

$$[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)\cap G_2,\quad (a_2,b_2)\cap F\neq\varnothing.$$

依次对 $G_3,G_4,\cdots$ 做下去,可得闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$:

$$[a_n,b_n]\cap F\supset[a_{a+1},b_{n+1}]\cap F\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$\varnothing\neq[a_n,b_n]\cap F\subset G_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

根据闭区间套定理,可知存在 $\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,以及

$$\xi\in\overline{F}=F,\quad \xi\in I\cap\left(F\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right).$$

例 19 解答下列问题:

(1) 设在 $\mathbf{R}^n$ 中 $\{G_\alpha\}$ 是 E 的一个开覆盖,试问 $\{\overline{G}_\alpha\}$ 能覆盖 $\overline{E}$ 吗?

(2) 设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是紧集,$\{G_k\}$ 是 K 的开(球)覆盖,试证明存在 $\varepsilon_0>0$,使得对任意的 $x\in K$,$B(x,\varepsilon_0)$ 必含于某个 G_k 中.

(3) 设有递增开集列: $G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_k\subset\cdots\subset\mathbf{R}^n$,且 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$,试证明对任意的有界闭集 $F\subset G$,必存在 k_0,当 $k\geqslant k_0$ 时,有 $G_k\supset F$.

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若对任意的 $x\in E$,均存在开球 B_x,使得 $E\cap B_x$ 是可数集,试证明 E 是可数集.

解 (1) 不一定. 例如 $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x\in\mathbf{R}^1,y>0\}$,用位于上半平面内(有理)开圆(以有理点为中心,正有理数为半径)全体 $\{G_k\}$ 加以覆盖 E,而 $\{\overline{G}_k\}$ 不能覆盖 $\overline{E}=\{(x,y): x\in\mathbf{R}^1,y\geqslant0\}$. 这是因为每个 $\overline{G}_k$ 与 Ox 轴至多一个交点.

(2) 反证法. 若结论不真,则对于 $n\in\mathbf{N}$,总存在 $x_n\in K$,使得开球 $B(x_n,1/n)$ 不含于任一 G_k 中. 因为 K 是有界闭集,所以存在 $\{x_n\}$ 的极限点 $x_0\in K$. 从而存在 $k_0,\varepsilon_0>0$,使得 $B(x_0,\varepsilon_0)\subset G_{k_0}$. 现在令 N: $N>2/\varepsilon_0$,并取 $n>N$,使得 $|x_0-x_n|<\varepsilon_0/2$,即知

$$B(x_n,1/n)\subset B(x_0,\varepsilon_0)\subset G_{k_0}.$$

导致矛盾,因此命题结论成立.

(3) 直接应用有限覆盖定理.

(4) 作开球列 $\{G_k\}$(有理点为心,正有理数为半径),则对每一个 B_x,均存在 G_{k_x}: $x\in G_{k_x}\subset B_x$. 我们选其中最小指标者,并仍记为 k_x,那么一切 $G_{k_x}(x\in E)$ 全体为可数个,又 $G_{k_x}\cap E$ 为可数集,而 $\left(\bigcup_{x\in E}G_{k_x}\right)\cap E=E$. 证毕.

例 20 试证明下列命题:

(1) 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一族有界闭集,若任取其中有限个: F_{α_1}, $F_{\alpha_2},\cdots,F_{\alpha_m}$ 都有 $\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i}\neq\varnothing$,则 $\bigcap_\alpha F_\alpha\neq\varnothing$.

(2) 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集族,G 是开集且有 $\bigcap_\alpha F_\alpha\subset G$,则 $\{F_\alpha\}$ 中存在有限个: $F_{\alpha_1},F_{\alpha_2},\cdots,F_{\alpha_m}$,使得 $\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i}\subset G$.

证明 (1) 反证法. 假定 $\bigcap_\alpha F_\alpha=\varnothing$,则令 $G_\alpha=\mathbf{R}^n\setminus F_\alpha$(开集),并取定一个 F_{α_0},注意到 $F_{\alpha_0}\cap\left(\bigcap_{\alpha\neq\alpha_0}F_\alpha\right)=\varnothing$,易知 $\{G_\alpha\}$ 构成 F_{α_0} 的一个开覆盖. 根据有限覆盖定理可知,存在有限个开集: $G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\cdots,G_{\alpha_m}$,使得 $F_{\alpha_0}\subset\bigcup_{i=1}^m G_{\alpha_i}$. 由此知 $F_{\alpha_0}\cap F_{\alpha_1}\cap\cdots\cap F_{\alpha_m}=\varnothing$,这与题设矛盾,证毕.

(2) 因为我们有

$$\bigcap_\alpha(F_\alpha\cap G^c)=\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)\cap G^c=\varnothing,$$

而 $F_\alpha\cap G^c$ 是有界闭集,所以根据(1)可知,存在有限个: $F_{\alpha_1}\cap G^c,F_{\alpha_2}\cap G^c,\cdots,F_{\alpha_m}\cap G^c$,使得 $\bigcap_{i=1}^m(F_{\alpha_i}\cap G^c)=\varnothing$. 即 $\left(\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i}\right)\cap G^c=\varnothing$. 这说明 $\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i}\subset G$.

例 21 试证明下列命题:

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 中每点都是 E 的孤立点，试证明 E 是某开集和闭集的交集.

(2) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$G_i\subset\mathbf{R}^n(i=1,2,\cdots,m)$ 是开集，且有 $F\subset\bigcup_{i=1}^{m}G_i$，则存在闭集 $F_i(i=1,2,\cdots,m)$，使得 $F_i\subset G_i(i=1,2,\cdots,m)$，且有 $F=\bigcup_{i=1}^{m}F_i$.

(3) 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上非负渐降连续函数列. 若在有界闭集 F 上 $f_n(x)\to 0(n\to\infty)$，则 $f_n(x)$ 在 F 上一致收敛于零.

证明 (1) $E=\overline{E}\cap(E')^c$.

(2) 设 $x\in F$，则 $x\in G_{i_x}$. 从而存在 $\delta_x>0$，使得 $\overline{B(x,\delta_x)}\subset G_{i_x}$. 注意到 $\{B(x,\delta_x)\}$ 是 F 的开覆盖，故存在有限个开球(记为)：

$$B(x_i,\delta_{x_i})\quad(i=1,2,\cdots,n_0),$$

$$F\subset\bigcup_{i=1}^{n_0}B(x_i,\delta_{x_i}).$$

现在，对每个 $k=1,2,\cdots,m$，记 H_k 是包含于 G_k 中的那些闭球 $\overline{B(x_i,\delta_{x_i})}$ 的并集，易知 H_k 是闭集，且有

$$H_k\subset G_k\ (k=1,2,\cdots,m),\quad \bigcup_{k=1}^{m}H_k\supset F.$$

再记 $F_k=H_k\cap F(k=1,2,\cdots,m)$，则 $F_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是闭集. 从而我们得到

$$F=\bigcup_{k=1}^{m}F_k,\quad F_k\subset G_k\ (k=1,2,\cdots,m).$$

(3) 由题设可知，对任意的 $x\in F$ 以及 $\varepsilon>0$，存在自然数指标 n，使得 $f_n(x)<\varepsilon$. 因为 $f(x)$ 是连续函数，所以存在 $\delta_x>0$，使得 $f_n(t)<\varepsilon(t\in B(x,\delta_x))$. 注意到 $\{B(x,\delta_x)\}$ 是 F 的开覆盖，故存在有限个开球

$$B(x_i,\delta_{x_i})\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

$$F\subset\bigcup_{i=1}^{m}B(x_i,\delta_{x_i}).$$

记与 x_i 相应的自然数指标为 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$，则令 $N=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_m\}$，我们得到

$$f_n(x) < \varepsilon \quad (n > N,\ x \in F).$$

这说明$\{f_n(x)\}$在 F 上一致收敛于 0.

例 22 设$A\subset \mathbf{R}^n$,令$E=\bigcup\limits_{x\in A}\overline{B(x,\varepsilon_0)}(\varepsilon_0>0)$,试证明下列命题:

(1) 若 A 是开集,则 E 也是开集.

(2) 若 A 是闭集,则 E 也是闭集.

证明 (1) 设 $x_0\in E$,则存在 $x\in A$,$x_0\in\overline{B(x,\varepsilon_0)}$. 若 $x_0\in B(x,\varepsilon_0)$,则 x_0 是 E 的内点;若 $x_0\overline{\in} B(x,\varepsilon_0)$,则存在 $\varepsilon'<\varepsilon_0/2$,以及 $x'\in B(x,\varepsilon_0)$且$|x_0-x'|<\varepsilon'$. 由此知 $x_0\in B(x',\varepsilon_0)$. 证毕.

(2) 设 $x_n\in E(n\in\mathbf{N})$且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,则存在 $y_n\in A(n\in\mathbf{N})$,$|y_n-x_n|<\varepsilon_0$. 因为有 $M>0$,使得

$$|y_n - x_0| \leqslant |y_n - x_n| + |x_n - x_0| \leqslant M,$$

所以存在$\{y_{n_k}\}$: $y_{n_k}\to y_0(k\to\infty)$. 从而又有$|x_0-y_0|\leqslant\varepsilon_0$,即 $x_0\in E$,E 是闭集.

1.2.3 Borel 集、点集上的连续函数

基 本 内 容

(一) Borel 集

定义 1 (F_σ,G_δ 集) 若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可数个闭集的并集,则称 E 为 F_σ(型)集;若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可数个开集的交集,则称 E 为 G_δ(型)集.

定义 2 设 Γ 是由集合 X 中一些子集所构成的集合族且满足下述条件:

(i) $\varnothing\in\Gamma$; (ii) 若 $A\in\Gamma$,则 $A^c\in\Gamma$;

(iii) 若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Gamma$,

这时我们称 Γ 是一个 **σ-代数**.

由定义立即可知下述事实:

(i) 若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots,m)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n\in\Gamma$;

(ii) 若 $A_n\in\Gamma(n=1,2,\cdots)$,则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\Gamma,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\in\Gamma,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\in\Gamma;$$

(iii) 若 $A,B\in\Gamma$,则 $A\setminus B\in\Gamma$; (iv) $X\in\Gamma$.

定义 3 (生成 σ-代数) 设 Σ 是集合 X 中一些子集所构成的集合族,考虑包

图书

含 Σ 的 σ-代数 Γ(即若 $A\in\Sigma$,必有 $A\in\Gamma$,这样的 Γ 是存在的,如 $\mathscr{P}(X)$).记包含 Σ 的最小 σ-代数为 $\Gamma(\Sigma)$.也就是说,对任一包含 Σ 的 σ-代数 Γ',若 $A\in\Gamma(\Sigma)$,则 $A\in\Gamma'$,我们称 $\Gamma(\Sigma)$ 为由 **Σ 生成的 σ-代数**.

定义 4 由 $\mathbf{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 σ-代数称为 Borel σ-代数,记为 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的元称为 Borel 集.

显然,$\mathbf{R}^n$ 中的闭集、开集、F_σ 集与 G_δ 集皆为 Borel 集;任一 Borel 集的补集是 Borel 集;Borel 集合列的并、交、上(下)限集皆为 Borel 集.例如 $F_{\sigma\delta}$集(可数个 F_σ 集的交集)是 Borel 集.

(二) 点集上的连续函数

定义 5 设 $f(x)$是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,$x_0\in E$.如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $x\in E\cap B(x_0,\delta)$时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处**连续**,称 x_0 为 f 的一个**连续点**(在 $x_0\overline{\in}E'$ 的情形,即 x_0 是 E 的孤立点时,$f(x)$自然在 $x=x_0$ 处连续).若 E 中任一点皆为 f 的连续点,则称 $f(x)$**在 E 上连续**.我们记 E 上的连续函数之全体为 $C(E)$.

显然,关于 $C(E)$中的函数,同样也有类似四则运算的性质,也不难证明下述事实(证明从略):

设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集,$f\in C(F)$,则

(i) $f(x)$是 F 上的有界函数,即 $f(F)$是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界集;

(ii) 存在 $x_0\in F$, $y_0\in F$,使得

$$f(x_0)=\sup\{f(x):x\in F\},\quad f(y_0)=\inf\{f(x):x\in F\};$$

(iii) $f(x)$在 F 上是一致连续的,即对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $x',x''\in F$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

此外,若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数列$\{f_k(x)\}$一致收敛于 $f(x)$,则 $f(x)$是 E 上的连续函数.

定理 (Baire) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是 F_σ 集,即 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, $F_k(k=1,2,\cdots)$是闭集.若每个 F_k 皆无内点,则 E 也无内点.

定义 6 设 $E\subset\mathbf{R}^n$.若 $\overline{E}=\mathbf{R}^n$,则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**稠密集**;若 $\mathring{\overline{E}}=\varnothing$,则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**无处稠密集**;可数个无处稠密集的并集称为**贫集**或**第一纲集**.不是第一纲集的称为**第二纲集**.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设$\{F_\alpha\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中的一个闭集族. 若对任意的指标 α,β,必有 $F_\alpha \subset F_\beta$ 或 $F_\beta \subset F_\alpha$(称$\{F_\alpha\}$是一个链),则$\bigcup\limits_\alpha F_\alpha$或只是$\{F_\alpha\}$中可数个的并集,或是闭集.

(2) 设 $G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_k \supset \cdots$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个 G_δ 集列,$E \subset \mathbf{R}^n$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} G_k \triangle E = \varnothing$,$G_k \cap E \neq \varnothing\ (k \in \mathbf{N})$,则 E 是 G_δ 集.

(3) 设 $E \subset \mathbf{R}^1$,则 $f: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ 在 E 上的图形集

$$G_f = \{(x,y): y = f(x), x \in E\}$$

是 $G_{\delta\sigma}$集.

证明 (1) 假定$\bigcup\limits_\alpha F_\alpha$不是可数子族的并集,则设 $x \in \overline{\bigcup\limits_\alpha F_\alpha}$ 且 $x \,\overline{\in}\, \bigcup\limits_\alpha F_\alpha$,并作开球列

$$B(x,1) \supset B(x,1/2) \supset \cdots \supset B(x,1/n) \supset \cdots,$$

那么对每个 $n \in \mathbf{N}$,就可选 $F_{\alpha_n} \in \{F_\alpha\}$,使得 $F_{\alpha_n} \cap B(x,1/n) \neq \varnothing$, $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} F_{\alpha_n} \neq \bigcup\limits_\alpha F_\alpha$. 从而存在 F_β: $F_\beta \in \{F_\alpha\}$,使得 $F_\beta \not\subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}$. 但由题设知 $F_\beta \supset F_{\alpha_n} (n \in \mathbf{N})$,由此知 $F_\beta \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}$. 这说明 $x \in \bigcup\limits_\alpha F_\alpha$,即 $\bigcup\limits_\alpha F_\alpha$是闭集.

(2) 记 $H_m = \bigcap\limits_{k=m}^{\infty} G_k$, 我们有

$$H_m \triangle E = (H_m \setminus E) \cup (E \setminus H_m)$$
$$= \left(\bigcap_{k=m}^{\infty} (G_k \setminus E)\right) \cup \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} (E \setminus G_k)\right).$$

注意到

$$\lim_{k\to\infty} (G_k \setminus E) \subset \lim_{k\to\infty} (G_k \triangle E) = \varnothing, \quad \lim_{k\to\infty} (E \setminus G_k) = \varnothing,$$

$$\bigcap_{k=m}^{\infty} (G_k \setminus E) = \lim_{N\to\infty} \bigcap_{k=m}^{N} (G_k \setminus E) \subset \lim_{N\to\infty} (G_N \setminus E),$$

$$\bigcup_{k=m}^{\infty}(E\backslash G_k)=\lim_{N\to\infty}\bigcup_{k=m}^{N}(E\backslash G_k)=\lim_{N\to\infty}(E\backslash G_N),$$

可知 $H_m\triangle E=\varnothing(m\in\mathbf{N})$. 因此,$H_m\cup E=H_m\cap E(m\in\mathbf{N})$. 即 $H_m=E(m\in\mathbf{N})$,E 是 G_δ 集.

(3) 对 $n\in\mathbf{N}$,我们作点集

$$B_{n,k}=\left\{x\in E:\frac{k}{n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{n}\right\}\times\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

并令 $B_n=\bigcup\limits_{k}B_{n,k}$,则 $G_f=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

例 2 试证明下列命题:

(1) (**函数连续点的结构**) 若 $f(x)$是定义在开集 $G\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,则 f 的连续点集是 G_δ 集.

(2) (**连续函数可微点集的结构**) 若 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数,则 f 的可微点集是 $F_{\sigma\delta}$集.

(3) 设 $f:\mathbf{R}^1\longmapsto\mathbf{R}^1$,则点集 $E=\{x\in\mathbf{R}^1:\lim\limits_{t\to x}f(t)$存在$\}$是 G_δ 集.

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$,则 $\chi_E(x)$是 $f_n\in C(\mathbf{R}^1)(n\in\mathbf{N})$的极限之充分必要条件是:$E$ 是 F_σ 集,也是 G_δ 集.

证明 (1) 令 $\omega_f(x)$为 f 在 x 点的振幅,易知 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续的充分且必要条件是 $\omega_f(x_0)=0$,由此可知 $f(x)$的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x\in G:\omega_f(x)<\frac{1}{k}\right\}.$$

因为$\{x\in G:\omega_f(x)<1/k\}$是开集,所以 $f(x)$的连续点集是 G_δ 集.

(2) 我们只需证明 f 的不可微点集是可列个 G_δ 集的并集. 引用上、下导数的概念,则其不可微点集就是下述三个集合的并集:

$$A=\left\{a:\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\};$$

$$B=\left\{a:\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty\right\};$$

$$C=\left\{a:\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty\right\}.$$

现在令 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中有理数集,则上述集合又可表示为

$$A=\bigcup_{r,R\in\mathbf{Q}}\left\{a:\varliminf_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant r<R\leqslant\varlimsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}$$

$$= \bigcup_{\substack{r,R\in \mathbf{Q}\\ R>r}} \left(\left\{ a:\ \varliminf_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant r \right\} \right.$$

$$\left. \bigcap \left\{ a:\ \varlimsup_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant R \right\} \right);$$

$$B = \bigcap_{r\in \mathbf{Q}} \left\{ a:\ \varlimsup_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant r \right\};$$

$$C = \bigcap_{r\in \mathbf{Q}} \left\{ a:\ \varliminf_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant r \right\}.$$

从而我们只需证明对任意的 $t\in \mathbf{R}^1$，点集

$$\left\{ a:\ \varlimsup_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant t \right\}$$

是 G_δ 集即可；同理可证点集

$$\left\{ a:\ \varliminf_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant t \right\}$$

亦是 G_δ 集.

对于每个自然数 n 与 k，作集合

$$G_{n,k} = \left\{ a:\ 存在满足\ 0 < |x-a| < \frac{1}{n}\ 的\ x, \right.$$

$$\left. 使得 \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > t - \frac{1}{k} \right\},$$

则由 f 的连续性可知，$G_{n,k}$ 是开集. 易知

$$\bigcap_{n,k=1}^{\infty} G_{n,k} = \left\{ a:\ \varlimsup_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant t \right\}.$$

(3) 记 $\omega_\delta(x) = \sup\{f(t):\ 0 < |t-x| < \delta\} - \inf\{f(t):\ 0 < |t-x| < \delta\}$，以及 $\omega(x) = \lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(x)$，则点集 $\{x\in \mathbf{R}^1:\ \omega(x) < 1/n\} \triangleq E_n (n\in \mathbf{N})$ 是开集. 我们有 $E = \{x\in \mathbf{R}^1:\ \omega(x) = 0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，证毕.

(4) 必要性　只需注意等式

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x\in \mathbf{R}^1:\ f_n(x) \geqslant 1/2\}$$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x\in \mathbf{R}^1:\ f_n(x) > 1/2\}.$$

充分性　假定已有 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，其中，$F_1\subset F_2\subset\cdots$ 是闭集列，$G_1\supset G_2\supset\cdots$ 是开集列. 我们作 $f_n\in C(\mathbf{R}^1)$ 如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in F_n,\\ 0, & x\in \mathbf{R}^1\setminus G_n,\end{cases}\quad 0\leqslant f_n(x)\leqslant 1\quad (n\in\mathbf{N}),$$

易知 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\chi_E(x)(x\in\mathbf{R}^1)$.（参阅 1.2.5）

例 3　试证明下列命题：

(1) 设 $f_n\in C(\mathbf{R}^1)(n\in\mathbf{N})$，则 $E=\{x\in\mathbf{R}^1:\ \underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)>0\}$ 是 F_σ 集.

(2) 设 $f_n\in C([a,b])(n\in\mathbf{N})$，且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$. 则 $\{x\in[a,b]:\ f(x)<\lambda\}\triangleq E_\lambda(\lambda\in\mathbf{R}^1)$ 是 F_σ 集.

(3) 设 $f_k\in C(\mathbf{R}^n)(k\in\mathbf{N})$，则 $E=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \overline{\lim}_{k\to\infty}|f_k(x)|=+\infty\}$ 是 G_δ 集.

证明　(1) 令 $F_{k,n}=\{x\in\mathbf{R}^1:\ f_n(x)\geqslant 1/k\}$，则 $F_{k,n}$ 是闭集. 我们有

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}F_{k,n}.$$

(2) 注意，$E_\lambda=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x\in[a,b]:\ f_n(x)\leqslant\lambda-1/k\}$.

(3) 注意，$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{m=N}^{\infty}\{x\in\mathbf{R}^n:\ |f_m(x)|>k\}$.

例 4　解答下列命题：

(1) 设 $G\subset\mathbf{R}^1$ 是 G_δ 集，试作 $f:\ \mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$，使得 $f(x)$ 的连续点集就是 G.

(2) 设闭集 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 G_δ 集，试作 $f\in C(\mathbf{R}^n)$，使得 $f^{-1}(0)=F$.

解　(1) 不妨假定 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，其中 $G_n\supset G_{n+1}(n\in\mathbf{N})$，则作函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in G,\\ 1/n, & x\in(G_n\setminus G_{n+1})\cap\mathbf{Q},\\ -1/n, & x\in(G_n\setminus G_{n+1})\cap(\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}).\end{cases}$$

(2) 不妨假定 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，其中 $G_k\supset G_{k+1}(k\in\mathbf{N})$，且对每个 k，作函数 $f_k\in C(\mathbf{R}^n)$：

$$f_k(x)=\begin{cases}0, & x\in F,\\ 1/k^2, & x\in\mathbf{R}^n\setminus G_k,\end{cases}\quad 0\leqslant f_k(x)\leqslant 1/k^2\quad(k\in\mathbf{N}),$$

我们令 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 即可.（参阅 1.2.5）

例 5 解答下列命题：

(1) 设 $A,B\subset\mathbf{R}^1$，且 $f\in C(A)$，$f\in C(B)$.

(i) 若 A,B 都是开集，试证明 $f\in C(A\cup B)$.

(ii) 若 A,B 都是闭集，试证明 $f\in C(A\cap B)$.

(2) 设 $F_1,F_2\subset\mathbf{R}^1$ 是闭集，$f(x)$ 在 F_1 以及 F_2 上都一致连续，试问 $f(x)$ 在 $F_1\cup F_2$ 上一致连续吗？

(3) 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$，令 $E_t=\{x\in E: f(x)>t\}$，试证明存在 $\mathbf{R}^n$ 中包含 E_t 的开集 G_t，使得 $E_t=E\cap G_t$.

(4) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在闭集 $F\subset\mathbf{R}^1$ 上的实值函数列. 若每个 $f_n(x)$ 的连续点集在 F 中稠密，试证明存在 $x_0\in F$，使得每个 $f_n(x)$ 都在 $x=x_0$ 处连续.

解 (1) 证略.（(i) 对无穷多个开集亦真，(ii) 则不然）

(2) 不一定. 例如设 $F_1=\mathbf{N}$，$F_2=\{n+1/n: n\in\mathbf{N}\}$，而

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in F_1,\\ 2, & x\in F_2.\end{cases}$$

(3) 对任意的 $x\in E_t$，即 $f(x)>t$，根据 f 的连续性，可知存在 $\delta_x>0$，使得当 $y\in E\cap B(x,\delta_x)$ 时，有 $f(y)>t$. 现在作开集

$$G_t=\bigcup_{x\in E_t}B(x,\delta_x),$$

因为 $G_t\supset E_t$，所以 $E\cap G_t\supset E_t$. 显然，对上述每个 $B(x,\delta_x)$ 来说，有

$$E\cap B(x,\delta_x)\subset E_t,$$

从而可知 $E\cap G_t\subset E_t$. 这就是说，$E_t=E\cap G_t$.

(4) (i) 若 x_0 是 F 的孤立点，则结论自然成立.

(ii) 设 F 无孤立点，且令 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_n>\cdots\to 0\ (n\to\infty)$. 首先，

取 $a_1\in F$ 是 $f_1(x)$的连续点，则存在 $\delta_1>0$，使得 $f_1(x)$在 $A_1=[a_1-\delta_1, a_1+\delta_1]\cap F$ 上的振幅 $\omega_{A_1}(f)<\varepsilon_1$. 注意到 A_1 中存在 $f_1(x)$的连续点 b，故有 $\eta>0$，使得 $f_1(x)$在 $B=[b-\eta,b+\eta]\cap F\subset A_1$ 上的振幅小于 ε_2. 其次，在 B 中取 $f_2(x)$的连续点 a_2，则存在 $\delta_2>0$，使得 $f_2(x)$在 $A_2=[a_2-\delta_2,a_2+\delta_2]\cap F\subset B\subset A_1$ 上的振幅 $\omega_{A_2}(f_2)<\varepsilon_1$. 自然也有 $\omega_{A_2}(f_1)<\varepsilon_2$. 依次又有 a_3 及 δ_3，使 $f_3(x)$在 $A_3=[a_3-\delta_3,a_3+\delta_3]\cap F\subset A_2$ 上的振幅 $\omega_{A_3}(f_3)<\varepsilon_1$，同时又有 $\omega_{A_3}(f_1)<\varepsilon_3$，$\omega_{A_3}(f_2)<\varepsilon_2$.

继续这一过程，可得一列有界闭集$\{A_n\}$，在 A_n 上有

$$\omega_{A_n}(f_n)<\varepsilon_1,\ \omega_{A_n}(f_{n-1})<\varepsilon_2,\ \cdots,\ \omega_{A_n}(f_1)<\varepsilon_n.$$

注意到 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 非空，易知每个 $f_n(x)$在 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 处连续.

例 6 试证明下列命题：

(1) $f\in C(\mathbf{R}^1)$的充分必要条件是：对任意的 $K\subset\mathbf{R}^1$ 紧集，$f(K)$必是 $\mathbf{R}^1$ 中的紧集.

(2) 设 $f_n\in C(F)$($n\in\mathbf{N}$，$F\subset\mathbf{R}^1$ 是闭集)，则$\{f_n(x)\}$的收敛点集 E 是 $F_{\sigma\delta}$型集.

(3) 设 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是有界闭集，$f_n\in C(F)$. 若 $f_n(x)$ 在 F 上一致收敛于 $f(x)$，则值域 $R(f)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{n=k}^{\infty}R(f_n)}$.

证明 (1) 必要性显然. 现证充分性. 设 $x_0\in\mathbf{R}^1$，$x_n\in\mathbf{R}^1(n\in\mathbf{N})$：$x_n\to x_0(n\to\infty)$，则 $K=\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中之紧集. 依题设知$\{f(x_0),f(x_1),f(x_2),\cdots\}$是紧集，从而必有 $f(x_n)\to f(x_0)(n\to\infty)$，即 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 对自然数 m,n,k，作点集

$$E_{m,n}^{(k)}=\{x\in F:|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant 1/k\},$$

则由题设知，$E_{m,n}^{(k)}$是闭集. 若记 $E_n^{(k)}=\bigcap_{m=n+1}^{\infty}E_{m,n}^{(k)}$，则 $E_n^{(k)}$是闭集. 令$E^{(k)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^{(k)}$，则 $E^{(k)}$是 F_σ 集. 因为 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E^{(k)}$，所以 E 是 $F_{\sigma\delta}$集.

(3) (i) 设 $y\in R(f)$，则存在 $x\in F$，使得 $f(x)=y$. 我们有 $f_n(x)\to y(n\to\infty)$，$f_n(x)\in R(f_n)(n\in\mathbf{N})$，以及

$$y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{n=k}^{\infty}R(f_n)},\quad R(f)\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{n=k}^{\infty}R(f_n)}.$$

(ii) 设 $y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{n=k}^{\infty}R(f_n)}$，则对任意的 k，$y\in\overline{\bigcup_{n=k}^{\infty}R(f_n)}$. 由此知存在$\{n_k\}$，以及 y_k：$y_k\in R(f_{n_k})$，且 $|y_{n_k}-y|<1/k(k\in\mathbf{N})$.

取 $x_k\in F$，使得 $f_{n_k}(x_k)=y_k$，从而存在 $x_{k_i}\to x\in F(i\to\infty)$. 对任给 $\varepsilon>0$，存在 n_0，使得 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2(n>n_0)$. 又存在 n_1，使得 $|f(x_{k_i})-f(x)|<\varepsilon/2(i>n_1)$. 令 $y_{k_i}=f_{n_i}(x_{k_i})$，$N=\max\{n_0,n_1\}$，则当 $i>N$ 时，有

$$|y_{k_i}-f(x)|\leqslant|f_{n_{k_i}}(x_i)-f(x_{k_i})|+|f(x_{k_i})-f(x)|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{i\to\infty}y_{k_i}=f(x)=y$，即 $y\in R(f)$.

例 7 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则 $f\in C(E)$的充分必要条件是：对任意的 $A\subset E$，必有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

(2) 设 $E\subset(-\infty,\infty)$. 若任意的 $f\in C(E)$都是有界函数，则 E 是紧集.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若任意的 $f\in C(E)$均可在 E 上取到最大值，则 E 是紧集.

证明 (1) *必要性* 假定 $f\in C(E)$，则对任意的 $A\subset E$，$B=f^{-1}(\overline{f(A)})$是闭集. 从而可知

$$A\subset f^{-1}[f(A)]\subset f^{-1}[\overline{f(A)}]=B,$$
$$\overline{A}\subset B,\quad f(\overline{A})\subset f(B)\subset\overline{f(A)}.$$

充分性 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集，令 $A=f^{-1}(F)$，则由 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$可知，$f(\overline{A})\subset\overline{F}=F$. 从而得

$$\overline{A}\subset f^{-1}(F)=A,\quad A=\overline{A}.$$

即 A 是闭集，故 $f\in C(E)$.

(2) (i) 假定 $E\cap(0,\infty)$是无界集，则取 $f(x)=e^x(x\in E)$，易知 $f\in C(E)$但无界，因此 E 在$(0,\infty)$内是有界的. 对于 $E\cap(-\infty,0)$是无界的情形，可取 $f(x)=e^{-x}$也可得出矛盾. 从而得出 E 是有界集.

(ii) 设 $x_0\in E'$. 如果 $x_0\overline{\in}E$，那么令 $f(x)=1/|x-x_0|$，由此可知

$f\in C(E)$,但 $f(x)$无界,与题设矛盾.从而 E 是闭集.

(3) 参阅(2).

例 8 解答下列命题:

(1) 设 $F\subset\mathbf{R}^1$.若对任意的 $f\in C(F)$,必有 $g\in C(\mathbf{R}^1)$,使得$g(x)=f(x)(x\in F)$(即可连续延拓到 $\mathbf{R}^1$ 上),试证明 F 是闭集.

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$,$f(x)$在 E 上一致连续,试证明 f 可唯一地一致连续延拓到 $\overline{E}$ 上.

(3) 设 $E\subset[0,1]$,$f\in C(E)$.试作$[0,1]$上的函数 $g(x)$,它在 E 上连续.

解 (1) 反证法.假定有$\{x_n\}\subset F$,$x_n\to x_0(n\to\infty)$,而 $x_0\overline{\in}F$,则作 $f(x)=1/|x-x_0|(x\in F)$.易知 $f\in C(F)$,但不存在 $g\in C(\mathbf{R}^1)$,使得 $g(x)=f(x)(x\in F)$.这是因为

$$g(x_0)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty,$$

所以导致矛盾.

(2) 唯一性显然,下面指出存在连续延拓.

设 $x_0\in E'$且$\{x_n\}\subset E$,$x_n\to x_0(n\to\infty)$,则对任给 $\varepsilon>0$,依题设知存在 $\delta>0$,当 $x',x''\in E$ 且$|x'-x''|<\delta$ 时,就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.这说明$\{f(x_n)\}$是 Cauchy 列,故知 $f(x_n)\to y'\in\mathbf{R}^1(n\to\infty)$.

我们假定存在$\{t_n\}\subset E$ 且 $t_n\to x_0$,使得$\{f(t_n)\}$也是收敛列,且记为 $f(t_n)\to y''$,那么作数列

$$\{s_n\}:\ s_{2n}=x_n,\ s_{2n-1}=t_n\quad(n\in\mathbf{N}),$$

则得 $s_n\to x_0(n\to\infty)$.由此又知存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$,故 $y'=y''$.这说明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$在 $x_n\to x_0$ 情况下与特定的$\{x_n\}$无关.从而我们定义 $g:\overline{E}\to\mathbf{R}^1$ 如下:

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E\setminus E',\\ \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n), & x\in E'\ (x_n\to x,x_n\in E).\end{cases}$$

现在来证明 $g(x)$是一致连续的.对任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta>0$,使得

$$|f(x)-f(t)|<\varepsilon\quad(x,t\in E,|x-t|<\delta).$$

若 $x,t\in E'$,且$|x-t|<\delta$,则取$\{x_n\}$,$\{t_n\}$:$x_n\to x,t_n\to t(n\to\infty)$.易知 $|x_n-t_n|\to|x-t|(n\to\infty)$,故可取 n_0,使得

$$|x_n - t_n| < \delta, \quad |f(x_n) - f(t_n)| < \varepsilon \quad (n > n_0).$$

由此我们有 $|g(x)-g(t)|<\varepsilon(|x-t|<\delta)$，即 $g(x)$ 在 $\overline{E}$ 上一致连续.

(3) 对 $x_0 \in \overline{E} \setminus E$，记

$$\varliminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \to E}} f(x) = l, \quad \varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \to E}} f(x) = L,$$

并取位于 l 与 L 间的任一值作为 $g(x_0)$ 的值.

对 $x_0 \notin \overline{E}$，则取点 $x' \in \overline{E}$，使得 $|x'-x_0|$ 为最小值（参阅 § 1.2.5），此时令值 $g(x_0)$ 为 $f(x')$.

对 $x_0 \in E$，自然应令 $g(x_0)=f(x_0)$.

如此作出 $g(x)$ 后，下面指出 $x_0 \in E$ 为 $g(x)$ 的连续点. 因为依题设，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，有

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2 \quad (x \in E, |x - x_0| < \delta).$$

对满足 $|x^*-x_0|<\delta/2$ 之 x^*：若 $x^* \in E$，则 $|g(x^*)-g(x_0)|<\varepsilon/2$；若 $x^* \in \overline{E} \setminus E$，则由于

$$\varliminf_{\substack{x \to x^* \\ x \to E}} f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon/2, \quad \varlimsup_{\substack{x \to x^* \\ x \to E}} f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon/2,$$

故得 $|g(x^*)-g(x_0)|\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$；若 $x^* \notin \overline{E}$，则存在 $x_1 \in \overline{E}$，使得

$$|x^* - x_1| < \delta/2, \quad g(x^*) = g(x_1).$$

而 $|x_1-x_0|<\delta$，故 $|g(x^*)-g(x_0)|\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$. 证毕.

例 9 设 $\{f_n(x)\}$ 定义在闭集 $F \subset \mathbf{R}^1$ 上，且每个 $f_n(x)$ 的连续点在 F 中稠密. 若 $f_n(x)$ 在 F 上一致收敛于 $f(x)$，试证明 $f(x)$ 的连续点在 F 中稠密.

证明 不妨假定 $x_0 \in F$ 不是孤立点，下面指出，在任意的邻域 $I_\delta = [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap F$ 中必有 $f(x)$ 的连续点：对任给 $\varepsilon>0$，存在 n_0，使得 $|f_{n_0}(x)-f(x)|<\varepsilon/3 (x \in F)$. 因为 I_δ 是闭集，而且每个 $f_n(x)$ 的连续点集在 F 中稠密，所以根据例 5 之(4)可知，存在 $x_1 \in I_\delta$，使得每个 $f_n(x)$ 均在 $x=x_1$ 处连续. 从而知对 $f_{n_0}(x)$，存在 $\eta=\eta(x_1,\varepsilon)>0$，使得

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_1)| < \varepsilon/3 \quad (x \in J_\eta = [x_1 - \eta, x_1 + \eta] \cap F).$$

因此，对 $x \in J_\eta$，我们有

$$|f(x_1) - f(x)| \leqslant |f(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

即得所证.

例 10 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则 $\chi_E\in C(\mathbf{R}^n)$的充分必要条件是：$E$ 是开集也是闭集.

(2) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的非负函数，$F\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集. 若视 $f(x)$是 F 上的函数是连续的，则函数 $g(x)=f(x)\cdot\chi_F(x)$是上半连续函数.

证明 (1) *充分性* 若 E 既开又闭，则 $\partial E=\varnothing$. 从而 $\chi_E(x)$是连续函数.

必要性 假设 $\chi_E(x)$连续，则易知 $\partial E=\varnothing$. 由此得 $\overline{E}\subset E$（否则，有 $x\in\overline{E}\setminus E\subset\mathbf{R}^n\setminus E\subset\overline{\mathbf{R}^n\setminus E}$，导致矛盾），即 E 是闭集. 类似地可推 $\mathbf{R}^n\setminus E$ 是闭集.

(2) 考查 $E_t=\{x\in\mathbf{R}^1:\ g(x)<t\in\mathbf{R}^1\}$.

(i) $t\leqslant 0$ 时，$E_t=\varnothing$，故 E_t 是开集.

(ii) $t>0$ 时，对 $x_0\in E_t$，存在 $\delta_0>0$，使得

$$g(x)<t\quad (x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\cap F).$$

而 $g(x)=0<t(x\in F^c)$，故$(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subset E_t$. 这说明 x_0 是内点，E_t 是开集.

例 11 试证明下列命题：

(1) 设$\{G_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密开集列，则 $G_0=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密.

(2) 设 $f_k\in C(\mathbf{R}^n)$ $(k=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R}^n,$$

则 $f(x)$的连续点集是 G_δ 型集：

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right),\ E_k(\varepsilon)=\{x\in\mathbf{R}^n:\ |f_k(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon\}.$$

(3) 设 $f_k\in C(\mathbf{R}^n)$ $(k=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

则 $f(x)$的不连续点集为第一纲集.

证明 (1) 只需指出对 $\mathbf{R}^n$ 中任一闭球 $\overline{B}=\overline{B(x,\delta)}$，均有 $G_0\cap\overline{B}\neq\varnothing$即可. 采用反证法：假定存在闭球 $\overline{B}_0=\overline{B(x_0,\delta_0)}$，使得 $G_0\cap\overline{B}_0=\varnothing$，则易知

$$\mathbf{R}^n = (G_0 \cap \overline{B}_0)^c = G_0^c \cup (\overline{B}_0)^c;$$

$$\overline{B}_0 = \mathbf{R}^n \cap \overline{B}_0 = G_0^c \cap \overline{B}_0 = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right)^c \cap \overline{B}_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k^c \cap \overline{B}_0).$$

注意到 G_k^c 是无内点的闭集，故由 Baire 定理可知，$\overline{B}_0$ 也无内点，矛盾.

(2) (i) 设 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 是 $f(x)$ 的连续点. 由题设知，对 $\varepsilon > 0$，存在 k_0，使得 $|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$，且存在 $\delta > 0$，使得

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3, \quad |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon/3, \quad x \in U(x_0, \delta).$$

从而可知，对 $x \in U(x_0, \delta)$，有

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad U(x_0, \delta) \subset \mathring{E}_{k_0}(\varepsilon).$$

这说明 $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k(\varepsilon)$. 又由 ε 的任意性，可推知

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right).$$

(ii) 设 $x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$，则对任给的 $\varepsilon > 0$，取 $m > 3/\varepsilon$. 由于 $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)$，故存在 k_0，使得 $x_0 \in \mathring{E}_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$. 从而存在 $\delta_0 > 0$，使得 $U(x_0, \delta_0) \subset E_{k_0}\left(\frac{1}{m}\right)$，即 $|f_{k_0}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$，$x \in U(x_0, \delta_0)$.

注意到 $f_{k_0}(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，又有 $\delta_1 > 0$，使得

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in U(x_0, \delta_1).$$

记 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$，则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

这说明 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

(3) 注意到 $f(x)$ 的连续点集的表示，只需指出(见上例)

$$\left[G\left(\frac{1}{m}\right)\right]^c \quad \left(G\left(\frac{1}{m}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

是第一纲集. 对 $\varepsilon > 0$，令

$$F_k(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^n: |f_k(x) - f_{k+i}(x)| \leqslant \varepsilon\},$$

易知 $\mathbf{R}^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k(\varepsilon)$，$F_k(\varepsilon)\subset E_k(\varepsilon)$. 从而有

$$\mathring{F}_k(\varepsilon)\subset\mathring{E}_k(\varepsilon)\subset G(\varepsilon),\quad \bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{F}_k(\varepsilon)\subset G(\varepsilon).$$

由此知

$$\begin{aligned}[G(\varepsilon)]^c&=\mathbf{R}^n\backslash G(\varepsilon)\subset\mathbf{R}^n\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{F}_k(\varepsilon)\\&=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k(\varepsilon)\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{F}_k(\varepsilon)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}[F_k(\varepsilon)\backslash\mathring{F}_k(\varepsilon)]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\partial F_k(\varepsilon).\end{aligned}$$

因为 $F_k(\varepsilon)$是闭集，所以 $\partial F_k(\varepsilon)$是无处稠密集，这说明$[G(\varepsilon)]^c$ 是第一纲集.

例 12 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可列集. 若 $\overline{E}=\mathbf{R}^n$，则 E 是 F_σ 集，且不是 G_δ 集.

(2) 设有 $\mathbf{R}^1$ 中的闭集 F，以及开集列$\{G_k\}$. 若对每一个 k，$\overline{G_k\cap F}=F$，则 $\overline{G_0\cap F}=F$，其中 $G_0=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$.

(3) 设 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是非空可数闭集，试证明 F 必含有孤立点.

证明 (1) 设 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots\}$，则因每个单点集$\{x_k\}$是闭集，所以由 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$是 F_σ 集. 但 E 不是 G_δ 集，否则就有开集 $G_1,G_2,\cdots,G_k,\cdots$，使得 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$. 由于 $G_k\supset E(k\in\mathbf{N})$，故 $G_k(k\in\mathbf{N})$在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密. 从而 $\mathbf{R}^n\backslash G_k(k\in\mathbf{N})$是无内点之闭集. 但我们有

$$\mathbf{R}^n=(\mathbf{R}^n\backslash E)\cup E=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathbf{R}^n\backslash G_k)\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}\right),$$

且上式右端是可列个无内点闭集之并集，这与 Baire 定理矛盾.

(2) 设 $t\in F$ 且不属于 G_0，又 $\delta>0$，令 $I_\delta=(t-\delta,t+\delta)$，只需指出 $G_0\cap F\cap I_\delta\neq\varnothing$：因为 $G_1\cap F$ 在 F 中稠密，所以存在 $x_1\in G_1\cap F\cap I_\delta$. 由此又知存在 $J_1\triangleq[x_1-\delta_1,x_1+\delta_1]\subset I_\delta\cap G_1$. 又由 $G_2\cap F$ 在 F 中稠密，可知存在 $x_2\in G_2\cap F\cap J_1$，还有 $J_2\triangleq[x_2-\delta_2,x_2+\delta_2]$. $J_2\subset J_1\cap G_2$，$\cdots$，继续此过程，可得$\{x_n\}$：$x_n\to x_0(n\to\infty)$，$x_0\in G_0\cap F$，证毕.

(3) 反证法. 假定 $F=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$中无孤立点，则对每个 x_n，

点集$(\mathbf{R}^1\setminus\{x_n\})\cap F$ 在 F 中稠密. 因为对每个 n,$\mathbf{R}^1\setminus\{x_n\}$是开集,所以$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathbf{R}^1\setminus\{x_n\})\cap F\right)$ 在 F 中也稠密. 但是$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathbf{R}^1\setminus\{x_n\})\right)\cap F=\varnothing$,矛盾. 即得所证.

例 13 试证明下列命题:

(1) 设$\{F_k\}\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集列,且 $\boldsymbol{R}^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$,则$\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{F}_k$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密.

(2) $E\subset\mathbf{R}^1$ 是第一纲集的充分必要条件是: E^c 包含一个在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密的 G_δ 集.

(3) 设 $G\subset[0,\infty)$是无界开集,作点集

$$D=\{x\in(0,\infty):\text{存在无穷多个自然数 } n, nx\in G\},$$

则 $\overline{D}=[0,\infty)$,且 D 是 G_δ 集.

证明 (1) 设 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$,对任意 $\delta>0$,我们有

$$J_\delta\triangleq[x_0-\delta,x_0+\delta]=\bigcup_{k=1}^{\infty}(J_\delta\cap F_k).$$

因为每个 $J_\delta\cap F_k$ 均为闭集,所以存在 $k_0\in\mathbf{N}$,使得 $F_{k_0}\cap J_\delta$ 有内点. 证毕.

(2) **必要性** 依题设知 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$,其中 E_n 是无处稠密集,故 $\mathbf{R}^1\setminus\overline{E}_n$ 是稠密开集. 从而可知 E 的补集包含$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathbf{R}^1\setminus\overline{E}_n)$,后者是稠密 G_δ 型集.

充分性 依题设知,$(\mathbf{R}^1\setminus E)\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$,其中 G_n 是稠密开集. 由此知$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbf{R}^1\setminus G_n)$,其中 $\mathbf{R}^1\setminus G_n$ 是无处稠密集.

(3) 对 $m\in\mathbf{N}$,作点集 $E_m=\{x: mx\in G\}$,则有表示式 $D=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m$,且 E_m 是开集. 下面指出: 对任意的 $n\in\mathbf{N}$,开集$\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m$ 在$[0,\infty)$中稠密. 采用反证法. 若存在 $n_0\in\mathbf{N}$,以及 x_0: $0<x_0<\infty$,$h_0>0$,$(x_0-h_0,x+h_0)\subset(0,\infty)$,使得$(x_0-h_0,x_0+h_0)\cap\bigcup_{m=n_0}^{\infty}E_m=\varnothing$,则取

m_0：$1/m_0<h_0$. 如果 $m_1>\max\{n_0,m_0,(x_0-h_0)/2h_0\}$，那么就有

$$\bigcup_{m=n_0}^{\infty} m(x_0-h_0,x_0+h_0)=(m_1(x-h),\infty).$$

注意到 G 是无界开集，故存在 m_2：$m_2>m_1$，以及 $x\in(x_0-h_0,x_0+h_0)$，使得 $m_2x\in G$. 由此可得 $x\in E_{m_2}\subset\bigcup_{m=n_0}^{\infty}E_m$，导致矛盾. 因此，我们有

$$(x_0-h_0,x_0+h_0)\cap\bigcup_{m=n_0}^{\infty}E_m\neq\varnothing.$$

因为稠密开集之交集，仍为稠密集，所以 D 在$[0,\infty)$中稠密.

例 14 解答下列命题：

(1) 若 $G\subset\mathbf{R}^1$ 是稠密开集，试证明 G^c 是无处稠密集(注意，在 G 非开集时结论不真)；若 $\{E_k\}\subset\mathbf{R}^n$ 是无处稠密集合列，试证明 $\mathbf{R}^n\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 是处处稠密集.

(2) 试作 $\mathbf{R}^1$ 中稠密点集列$\{E_k\}$，使得 $\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\varnothing$.

(3) 记 $\mathbf{R}^2$ 中以(x,r_x)为中心的开圆为 B_x，其中 $x\in\mathbf{R}^2$，r_x 为正有理数，且令点集

$$A=\bigcup_{x\in\mathbf{Q}}B_x,\quad B=\bigcup_{x\in\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}}B_x.$$

试证明不论如何选择 r_x，总有 $A\cap B\neq\varnothing$.

解 (1) 证略.

(2) 记 $\mathbf{R}^1$ 中有理数为 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，且作

$$E_1=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\},$$
$$E_2=\{r_2,r_3,\cdots,r_n,\cdots\},$$
$$\cdots\cdots$$
$$E_k=\{r_k,r_{k+1},\cdots,r_n,\cdots\},$$
$$\cdots\cdots$$

易知每个 E_n 均在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密，但 $\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\varnothing$.

(3) 令 $E_n=\{x\in\mathbf{R}^2$：x 是无理数，相应的 B_x 之半径 $r_x\geqslant 1/n\}$，则因 $\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}$ 是第二纲集，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 是第二纲集. 由此知存在 n_0，使得 $\bar{E}_{n_0}$

含有区间 I. 从而当 $x\in I$,且 $0<y<2/n_0$ 时,有 $(x,y)\in B$,而当 $x\in I$ 且 $0<r_x\in \mathbf{Q}_+$ 时之任一圆 B_x,均含有 B 之点.

例 15 试证明下列命题:

(1) 不能定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$,使其在 $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ 上连续,但在 $[0,1]$ 中的无理点处不连续.

(2) 不存在满足下列条件的 $f\in C(\mathbf{R}^2)$:

(i) 在 $\mathbf{R}^2$ 中每一点 (x,y) 处,偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 均存在.

(ii) 在 $\mathbf{R}^2$ 中每一点 (x,y) 处,$f(x,y)$ 均不可微.

(3) 设 $F_n\subset\mathbf{R}^1(n\in\mathbf{N})$ 是无处稠密集,且 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 无内点,则函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\chi_{F_n}(x)$ 在 $x_0\in\mathbf{R}^1\setminus E$ 处连续,在 $x_0\in E$ 处不连续.

证明 (1) 注意,$f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集.

(2) 因为 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\lim_{n\to\infty}n[f(x+1/n,y)-f(x,y)]$,所以 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 的连续点集 G_1 是 $\mathbf{R}^2$ 中的稠密 G_δ 集. 类似地可知 $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 的连续点集 G_2 也是 $\mathbf{R}^2$ 中的稠密 G_δ 集,自然,$G_1\cap G_2$ 也是 $\mathbf{R}^2$ 中的稠密 G_δ 集. 因此,$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 在 $G_1\cap G_2$ 上连续,而 $f(x,y)$ 就在 $G_1\cap G_2$ 上可微了.

(3) (i) 设 $x_0\in\mathbf{R}^1\setminus E$,则 $f(x_0)=0$,且对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_0>0$ 以及 N: $2^{-N}<\varepsilon$,使得区间 $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 内不含 $F_1,F_2,\cdots,F_N$ 的点. 从而我们有

$$f(x)=\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}\chi_{F_n}(x)\leqslant 2^{-N}<\varepsilon\quad(x_0-\delta<x<x_0+\delta).$$

这说明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

(ii) 设 $x_0\in E$,则存在 n_0,使得 $x_0\in F_{n_0}$,且 $f(x_0)\geqslant 1/2^{n_0}$. 因为 x_0 不是 E 的内点,所以对任意的 $\delta>0$,总有

$$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap E^c.$$

这说明 $f(x)=0$,即 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续.

例 16 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微，则 $f'(x)$的连续点集在$[a,b]$中稠密.

(2) 设 $f\in C([0,1])$，且令

$$f_1'(x)=f(x),\ f_2'(x)=f_1(x),\ \cdots,\ f_n'(x)=f_{n-1}(x),\ \cdots.$$

若对每一个 $x\in[0,1]$，都存在自然数 k，使得 $f_k(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

证明 (1) 令 $F_n(x)=n[f(x+1/n)-f(x)]$ $(a<x<b,n\in\mathbf{N})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=f'(x)$ $(a<x<b)$. 注意到 $F_n\in C((a,b))$ $(n\in\mathbf{N})$，故得所证.

(2) 只需指出 $f(x)$在$[0,1]$中的一个稠密集上为 0 即可. 对此，我们在$[0,1]$中任取一个闭子区间 I，并记

$$F_k=\{x\in I:\ f_k(x)=0\}\quad (k=1,2,\cdots).$$

显然，每个 F_k 都是闭集，且 $I=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$. 根据 Baire 定理可知，存在 F_{k_0}，它包含一个区间(α,β). 因为在(α,β)上 $f_{k_0}(x)=0$，所以 $f(x)=0$，$x\in(\alpha,\beta)$. 注意到$(\alpha,\beta)\subset I$，即得所证.

例 17 解答下列问题：

(1) 设 $f\in C((0,\infty))$. 若对任意的 $x>0$，总有 $f(x/n)\to 0$ $(n\to\infty)$，试问是否成立 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$?

(2) 设 $f\in C((0,\infty))$. 若对任意的 $x>0$，有 $f(nx)\to 0$ $(n\to\infty)$，试证明 $f(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$.

(3) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上是单元连续的，且在 $\mathbf{R}^2$ 中的一个稠密集上 $f(x,y)=0$. 试证明 $f(x,y)\equiv 0$.

解 (1) $f(x)\to 0$ $(x\to 0+)$成立. 对任给 $\varepsilon>0$，作

$$F_k=\{0\}\cup\bigcap_{n=k}^{\infty}\{x>0:\ |f(x/n)|\leqslant\varepsilon\}\quad (k\in\mathbf{N}),$$

则每个 F_k 均为闭集，且有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k=[0,\infty)$. 根据 Baire 定理，可知存在 k_0，使得 F_{k_0}有内点，从而又可得

$$(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subset F_{k_0}\quad (x_0>0,0<\delta_0\leqslant x_0/k_0).$$

如果 $0<x\leqslant\delta_0$，而且 $n=[x_0/x]$（整数部分），那么

$$x_0-\delta_0\leqslant x_0-x<nx\leqslant x_0<x_0+\delta_0\quad (n\geqslant k_0).$$

因此 $nx\in F_{k_0}$，再注意到 F_{k_0}之定义，我们有

$$f(x) = |f(nx/n)| \leqslant \varepsilon,$$

即 $f(x)\to 0(x\to 0+)$.

(2) 反证法. 假定结论不真,则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及递增列$\{x_n\}$: $x_n\to +\infty(n\to\infty)$,使得$|f(x_n)|\geqslant 2\varepsilon_0$. 因为 f 是连续的,所以对每个 n,存在(a_n,b_n): $x_n\in(a_n,b_n)$,使得$|f(x)|>\varepsilon_0(a_n<x<b_n)$. 考查无上界开集 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$,并记 D 如例 13 之(3)所示,则 D 在$[0,\infty)$中稠密,且对某个 x_0: $0<x_0\in D$,有无穷多个 n_k,使得 $n_kx_0\in G$. 从而$|f(n_kx_0)|>\varepsilon_0$,但是这与 $f(nx_0)\to 0(n\to\infty)$矛盾,证毕.

(3) 反证法. 假定存在$(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,使得 $f(x_0,y_0)>0$. 则存在 $\delta_0>0$,使得

$$f(x,y_0)\geqslant f(x_0,y_0)/2,\quad x\in J_0\triangleq[x_0-\delta,x_0+\delta_0].$$

作闭集 $F_y=\{x: f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)/4\}$,且令

$$I_n=[y_0-1/n,y_0+1/n],\quad E_n=\bigcap_{y\in I_n}F_y,$$

根据 $f(x,y)$对 y 的连续性可知,$J_0\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 由于 E_n 是闭集,故由 Baire 定理可知,存在 n_0,使得 E_{n_0}有内点,$E_{n_0}\times I_{n_0}$有内点. 但在$(x,y)\in E_{n_0}\times I_{n_0}$时 $f(x,y)\neq 0$,这与题设矛盾,证毕.

例 18 试证明下列命题:

(1) 设 Γ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的一个连续函数族. 若对每一个 $x\in\mathbf{R}^1$,均存在 $M_x>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M_x\quad(f\in\Gamma).$$

则存在 $M>0$,以及开集 $G\subset\mathbf{R}^1$,使得

$$|f(x)|\leqslant M\quad(f\in\Gamma,x\in G).$$

(2) 设 $f\in C^{(\infty)}([0,1])$. 若对每个 $x\in[0,1]$,均存在 $n_x\in\mathbf{N}$,使得 $f^{(n_x)}(x)=0$,则存在区间$(a,b)\subset[0,1]$,以及多项式 $P(x)$,使得

$$f(x)=P(x)\quad(x\in(a,b)).$$

证明 (1) 令 $F_n=\{x\in\mathbf{R}^1: f\in\Gamma,|f(x|\leqslant n\}$,则 $F_n(n\in\mathbf{N})$是闭集,且有 $\mathbf{R}^1=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. 从而根据 Baire 定理可知,存在 n_0,使得 F_{n_0}有内

点. 记 $G=\mathring{F}_{n_0}$(开集),则

$$|f(x)|\leqslant n_0 \quad (x\in G, f\in\Gamma).$$

(2) 令 $E_n=\{x\in[0,1]:\ f^{(n)}(x)=0\}$,易知若 $x\in[0,1]$,则存在 n_x,使得 $x\in E_{n_x}$. 注意到 $[0,1]=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}E_n$ 以及 $E_n(n\in\mathbf{N})$是闭集,根据 Baire 定理,可知某个 E_{n_0}包含开区间(a,b): $f^{(n_0)}(x)=0\ (a<x<b)$.

对 $f^{(n_0)}(x)$迭次作积分,可得

$$f^{(n_0-1)}(x)=c_0,\quad f^{(n_0-2)}(x)=c_0x+c_1,\quad \cdots \quad (a<x<b),$$

$$f(x)=\frac{c_0}{(n_0-1)!}x^{n_0-1}+\frac{c_1}{(n_0-2)!}x^{n_0-2}$$
$$+\cdots+c_{n_0-1}\quad (a<x<b).$$

1.2.4 Cantor 集

基 本 内 容

Cantor 集 C 的定义见周民强编《实变函数论》第 57 页,其基本性质有:

(i) C 是$[0,1]$中的非空有界闭集;

(ii) $C=C'$,即 C 是完全集;

(iii) C 无内点;

(iv) C 的基数是 c,且 C 中点 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i/3^i\ (a_i=0$ 或 $2)$.

注 任一非空完全集的基数均为 c.(证明见 Натансон(纳汤松)著《Теория Функций Вещественной Переменной》(实变函数论)上册,有高等教育出版社出版的中译本,1955 年)

定义 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,$x\in\mathbf{R}^n$. 若对任意的 $\delta>0$,$E\cap B(x,\delta)$是不可数集,则称 x 为 E 的**凝聚点**. 凝聚点全体记为 $K(E)$.

典型例题精解

例 1 解答下列问题:

(1) $[0,1]$中点 $x=1/4,1/13$ 属于 Cantor 集吗?

(2) 设 C 是$[0,1]$中 Cantor 集,试证明对任意的$[0,1]$中的子区间$[a,b]$,必存在区间$(a',b')\subset[a,b]$,(a',b')不含 C 中点,但有 $b'-a'\geqslant(b-a)/5$.

(3) 试作 $\mathbf{R}^1$ 中的孤立点集 E，使 E' 是完全集.

(4) 试作 $\mathbf{R}^1$ 中由无理点构成的完全集.

(5) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是非空完全集，试证明对任意的 $x\in E$，存在 $y\in E$，使得 $x-y$ 为无理数.

(6) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$. 若对 E 中任意两点 s,t：$s<t$，均存在 $w\in E$：$x<w<t$，试问 $\overline{E}$ 是否必有内点？

解 (1) 是的. $1/4=0.0202\cdots$；$1/13=0.002002\cdots$.

(2) 注意构作 Cantor 集的过程，其中第 n 步舍去 2^{n-1} 个长为 $1/3^n$ 的区间.

(3) 设 E 为 $[0,1]\setminus C$ 的可列个区间的中点全体，易知 $E'=C$.

(4) 设 $a,b(a<b)$ 为无理点，且令 $[a,b]\cap\mathbf{Q}=\{r_n\}$.

以 $(a+b)/2$ 为中心作以无理数 $a_1,b_1(a_1\neq a,b_1\neq b)$ 为端点之区间，使得 $r_1\in(a_1,b_1)$. 以类似的方法，在 $[a,a_1]$ 中作 a_2,b_2：$r_2\in(a_2,b_2)$（假定 $r_2\in(a,a_1)$，以下类推），在 $[b_1,b]$ 中作 a_3,b_3：$r_3\in(a_3,b_3)$，…，继续作下去，可得 $\{(a_n,b_n)\}$：$r_n\in(a_n,b_n)(n\in\mathbf{N})$. 令 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$，则 $E=[a,b]\setminus G$ 即为所求.

(5) 因为 $\overline{\overline{E}}=c$，所以对任意的 $x_0\in E$，$\{x_0-y:\ y\in E\}$ 是不可数集. 由此可知必存在 $y_0\in E$，使得 $x_0-y_0\overline{\in}\mathbf{Q}$.

(6) 否. 例如 $E=C\setminus\mathbf{Q}$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是不可数集，则 $E\cap K(E)$ 是不可数集.

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$，则 $K(E)$ 是完全集.

(3) 设 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是不可数的闭集，则 F 可表示为一个完全集与一个可数集之并.

证明 (1) 只需指出 $D=E\setminus K(E)$ 是可数集. 对于任意 $x\in D$，易知可作以有理数为端点的区间：(r'_x,r''_x)：$x\in(r'_x,r''_x)$，使得 $E\cap(r'_x,r''_x)$ 是可数集，自然 $D\cap(r'_x,r''_x)$ 也是可数集. 注意到全体以有理数为端点的区间是可数集，故结论得证.

(2) (i) 设 $x_0\in(K(E))'$，则对任意的 $\delta>0$，存在 $y_0\in K(E)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 由此知存在 $(y_0-\delta_0,y_0+\delta_0)$ 包含 E 中不可数个点，而

且 $(y_0-\delta_0, y_0+\delta_0)\subset(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 从而我们有 $x\in K(E)$，即$K(E)$是闭集.

(ii) 设 $x_0\in K(E)$，且令 $E_\delta=E\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)(\delta>0)$，则 E_δ 是不可数集. 因为 $E_\delta\cap K(E_\delta)$是不可数集，且 $E_\delta\subset E$，所以 E_δ 的凝聚点必为 E 的凝聚点. 这说明 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap K(E)$ 是不可数集，$x_0\in(K(E))'$.

(3) 由 $K(F)\subset F, D=F\setminus K(F)$是可数集，即得 $F=K(F)\cup D$.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $C\subset[0,1]$是 Cantor 集，则存在 $x_0\in\mathbf{R}^1$，使得点集 $C+\{x_0\}=\{x+x_0: x\in C\}$不含有理数.

(2) 设 $F\subset\mathbf{R}^2$ 是非空真闭子集. 若 ∂F 不包含完全集，则 F 是可数集.

(3) $E\subset\mathbf{R}^1$ 是完全集的充分必要条件是 $E=\left(\bigcup\limits_{n\geqslant1}(a_n, b_n)\right)^c$，其中 (a_i, b_i)与(a_j, b_j) $(i\neq j)$无公共端点.

证明 (1) 已知 C 中点 x 有三进位小数表示，

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_i/3^n,\quad a_i=0 \text{ 或 } 2.$$

作 $x_0=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/3^{n^2}$.（见 Monthly，1996）

(2) 由于 ∂F 是闭集，故由 $F=K\cup E$(K 是完全集，E 是可数集)，可知 ∂F 是可数集.

设 $x\in F\setminus\partial F$，则存在 $\delta_0>0$，使得 $B(x,\delta_0)\subset F$. 因为有 $\mathbf{R}^2\setminus F\neq\varnothing$，$\mathbf{R}^2\setminus F$ 是开集，所以存在 $t_0\in\mathbf{R}^2\setminus F$，以及 $\delta_1>0$，$B(t_0,\delta_1)\subset\mathbf{R}^2\setminus F$. 作平行于点 x 与 t_0 的联结直线且与 $B(x,\delta_0)$，$B(t_0,\delta_1)$相交之直线之全体为 S，则 $\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{\mathbf{R}^1}}$. 易知如此所作之直线均通过 ∂F. 故$\overline{\overline{\partial F}}=c$. 矛盾. 这说明 $F\setminus\partial F=\varnothing$，即 $F=\partial F$，F 可数.

(3) 必要性　若 E 是完全集，则 E 是闭集. 从而 E^c 是开集，它是 E^c 内构成区间的并集. 这些构成区间相互之间是没有公共端点的，因为否则 E 中就会有孤立点了，这是不可能的.

充分性　首先，由题设知 E 是闭集. 其次，对任意的 $x\in E$，如果 x

$\overline{\in} E'$，那么存在 $\delta>0$，使得 $(x-\delta,x+\delta)\cap E=\{x\}$. 这说明 x 是某两个开区间的端点，与假设矛盾.

1.2.5 点集间的距离

基本内容

定义 设 $x\in\mathbf{R}^n$，E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，称

$$d(x,E)=\inf\{|x-y|:y\in E\}$$

为点 x 到 E 的**距离**；若 E_1,E_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，称

$$d(E_1,E_2)=\inf\{|x-y|:x\in E_1,y\in E_2\}$$

为 E_1 与 E_2 之间的距离. 也可等价地定义为

$$\inf\{d(x,E_2):x\in E_1\}\quad 或\quad \inf\{d(E_1,y):y\in E_2\}.$$

定理 1 若 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集且 $x_0\in\mathbf{R}^n$，则存在 $y_0\in F$，使得 $|x_0-y_0|=d(x_0,F)$.

下述初等性质成立：

(i) 若 $x\in E$，则 $d(x,E)=0$.

(ii) $x\in\mathring{E}$ 当且仅当 $d(x,E^c)>0$.

(iii) $x\in E'$ 当且仅当 $d(x,E\setminus\{x\})=0$.

(iv) $x\in\overline{E}$ 当且仅当 $d(x,E)=0$.

(v) $x\in\partial E$ 当且仅当 $d(x,E)=d(x,E^c)=0$.

(vi) $\dim(A\cup B)\leqslant\dim(A)+\dim(B)+d(A,B)$.

定理 2 若 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中非空点集，则 $d(x,E)$ 作为 x 的函数在 $\mathbf{R}^n$ 上是一致连续的.

推论 若 F_1,F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个非空闭集且其中至少有一个是有界的，则存在 $x_1\in F_1,x_2\in F_2$，使得 $|x_1-x_2|=d(F_1,F_2)$.

定理 3(连续延拓) 若 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，$f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数且 $|f(x)|\leqslant M(x\in F)$，则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足

$$|g(x)|\leqslant M,\quad g(x)=f(x),\quad x\in F.$$

注 上述定理在 $f(x)$ 无界时也成立(研究 $\arctan f(x)$).

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则对任给 $t>0$，$\{x\in\mathbf{R}^n: d(x,E)<t\}$ 是开集.

(2) 设 $G\subset\mathbf{R}^n$ 是开集，F 是 G 内的有界闭集，则存在 $r>0$，使得

$\{x: d(x,F)\leqslant r\}\subset G$.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是一个非空点集. 若对任意的 $x\overline{\in}E$,存在 $y\in E$,使得 $d(x,y)=d(x,E)$,则 E 是闭集.

(4) $\mathbf{R}^n$ 中任一闭集 F 皆为 G_δ 集,任一开集 G 皆为 F_σ 集.

证明 (1) 注意 $d(x,E)$是 x 的连续函数.

(2) 易知 G^c 是闭集,且有 $F\cap G^c=\varnothing$,故存在 $x_1\in F, x_2\in G^c$,使得 $d(x_1,x_2)=d(F,G^c)>0$. 现在,取 $r=d(x_1,x_2)$,则当 $d(x,F)<r$ 时就有 $x\in G$. 因为否则就出现 $d(x,F)\geqslant d(G^c,F)=r$,矛盾. 这就说明

$$\{x: d(x,F) < r\} \subset G.$$

(3) 设 $x\in E'\subset\mathbf{R}^n$,则依题设知存在 $y\in E$,使得

$$d(x,y) = d(x,E).$$

但 $d(x,E)=0$,故 $x=y\in E$,即 E 是闭集.

(4) (i) 作开集 $G_k=\{x\in\mathbf{R}^n: d(x,F)<1/k\}$,易知 $F\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$. 又若 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$,则对任意的 k,有 $x\in G_k$,即 $d(x,F)<1/k$. 从而知 $d(x,F)=0$,注意到 F 是闭集,故存在 $y\in F$,使得 $d(x,y)=d(x,F)=0$. 由此又知 $x=y\in F$,这说明 $\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\subset F$. 综合之,有 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$.

(ii) 易知 $F\triangleq\mathbf{R}^n\setminus G$ 是闭集,且由(i)知 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$, $G_k(k\in\mathbf{N})$是开集. 由此又得 G_k^c 是闭集,且有

$$G = F^c = \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\Big)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty}G_k^c,$$

即 G 是 F_σ 集.

例 2 解答下列问题:

(1) 设 $A=\{n+1/2: n=0,\pm1,\cdots\}$, $B=\{m\sqrt{2}: m=0,\pm1,\cdots\}$,试求 $d(A,B)$.

(2) 试作 $\mathbf{R}_+^2$ 中的点集 A, $\mathbf{R}^1$ 中点集 B,使得 $d(A,B)=0$.

(3) 试问:圆盘 $F=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant1\}$可表示为两个互不相交的闭集之并吗?

(4) 设 F_1,F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中互不相交的闭集,试证明存在开集 G_1,G_2,使

得 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$，且有 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

（5）设 $\{F_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集列，$x_0 \in \mathbf{R}^n$. 若有 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_0, F_k) = +\infty$，试证明 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ 是闭集.

解 （1）对任给 $\varepsilon > 0$，因为 $\sqrt{2} \,\overline{\in}\, \mathbf{Q}$，所以存在自然数 p, q，整数 m：$q > |m|$，使得 $|\sqrt{2} - p/q| < \varepsilon/2|m|$. 注意到对 $m \neq 0$，有

$$|x - y| = |n + 1/2 - m\sqrt{2}|$$
$$= |m|\,|(2n+1)/2m - \sqrt{2}|$$
$$(x \in A, y \in B),$$

可选 n, m，使得 $|(2n+1)/2m - p/q| < \varepsilon/2|m|$. 从而知

$$|\sqrt{2} - (2n+1)/2m| < \varepsilon/|m|,$$
$$|m|\,|(2n+1)/2m - \sqrt{2}| < \varepsilon.$$

这说明 $d(A, B) = 0$.

（2）作 $A = \{(x, y): x \cdot y = 1\} \subset \mathbf{R}^2_+$，$B$ 是 Ox 轴，则 $d(A, B) = 0$.

（3）否. 反证法. 假定结论成立，即 $F = F_1 \cup F_2$，$F_1 \cap F_2 = \varnothing$，其中 F_1 与 F_2 是闭集，则知存在 $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$，使得 $d(x_1, x_2) = d(F_1, F_2) > 0$. 注意到点 x_1 与 x_2 的联结直线段是属于 F 的，矛盾.

（4）作开集 G_1, G_2 如下：

$$G_1 = \{x \in \mathbf{R}^n: d(x, F_1) - d(x, F_2) < 0\},$$
$$G_2 = \{x \in \mathbf{R}^n: d(x, F_2) - d(x, F_1) < 0\},$$

易知 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$，且有 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

（5）设 $x_0 \in F'$，则存在 $\{x_m\} \subset F$：$x_m \to x_0 (m \to \infty)$. 不妨假定 $|x_m - x_0| \leqslant M (m \in \mathbf{N})$，则由题设知存在 N，使得 $d(x_0, F_k) > M (k \geqslant N)$. 从而当 $k \geqslant N$ 时，$x_m \,\overline{\in}\, F_k$. $\{x_m\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k$. 因为 $\bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k$ 是闭集，所以 $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k \subset F$，即 F 是闭集.

例 3 解答下列问题：

（1）设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，试作 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数序列 $\{g_k(x)\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = \chi_F(x)$，$x \in \mathbf{R}^n$.

（2）设 f_n：$\mathbf{R}^1 \longmapsto \mathbf{R}^1 (n \in \mathbf{N})$，$G \subset \mathbf{R}^1$ 是开集，试证明

$$\{x\in\mathbf{R}^1:\lim_{n\to\infty}f_n(x)\in G\}$$
$$=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathbf{R}^1:d(f_n(x),G^c)>1/m\}.$$

解 (1) $\chi_F(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+k\cdot d(x,F)}$.

(2) 证略.

例 4 解答下列问题:

(1) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集,试作 $f\in C(\mathbf{R}^n)$,使得 $F=\{x:f(x)=0\}$.

(2) 设 $F\subset\mathbf{R}^1$ 是闭集,试作 $\mathbf{R}^1$ 上的连续可微的递增函数,使得 $F=\{x\in\mathbf{R}^1:f'(x)=0\}$.

(3) 若 F_1,F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集,试作 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$,使得

(i) $0\leqslant f(x)\leqslant 1(x\in\mathbf{R}^n)$;

(ii) $F_1=\{x:f(x)=1\}$, $F_2=\{x:f(x)=0\}$.

(4) 设 F_1,F_2,F_3 是 $\mathbf{R}^n$ 中三个互不相交的闭集,试作 $f\in C(\mathbf{R}^n)$,使得

(i) $0\leqslant f(x)\leqslant 1$;

(ii) $f(x)=0(x\in F_1),f(x)=1/2(x\in F_2),f(x)=1(x\in F_3)$.

解 (1) $f(x)=d(x,F)$.

(2) $f(x)=\int_0^x d(t,F)\mathrm{d}t,f'(x)=d(x,F)$.

(3) 构造函数 $f(x)$:
$$f(x)=\frac{d(x,F_2)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)},\quad x\in\mathbf{R}^n$$
就是所求的函数.

(4) $f(x)=\frac{d(x,F_1\cup F_2)+d(x,F_1\cup F_3)}{d(x,F_1\cup F_2)+2d(x,F_1\cup F_3)+d(x,F_2\cup F_3)}$.

注 设 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 是互不相交的闭集,则令
$$f(x)=\begin{cases}a_i, & x\in F_i(i=1,2,\cdots,k),\\ \left(\sum_{i=1}^{k}a_i/d(x,F_i)\right)\Big/\sum_{i=1}^{k}1/d(x,F_i), & x\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{k}F_i,\end{cases}$$
我们有 $f(x)=a_i(x\in F_i)(i=1,2,\cdots,k)$.

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$. 若对 $\mathbf{R}^2$ 中一切非空子集 A,B: $d(A,B)=0$,总有 $d(f(A),f(B))=0$,则 $f(x)$一致连续.

(2) 设映射 f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 满足: 若 $x_1,x_2 \in \mathbf{R}^2$ 且 $d(x_1,x_2) \in \mathbf{Q}_+$时有 $d(f(x_1),f(x_2))=d(x_1,x_2)$,则对一切 $x_1,x_2 \in \mathbf{R}^2$ 均有

$$d(f(x_1),f(x_2)) = d(x_1,x_2).$$

证明 (1) 反证法. 假定 f 不是一致连续的,则存在 $\varepsilon_0>0$,对任意的 $\delta>0$,总存在 $x,y \in \mathbf{R}^2$,使得

$$|f(x) - f(y)| \geqslant 3\varepsilon_0 \quad (d(x,y) < \delta).$$

对任意的 $z \in \mathbf{R}^2$,作点集

$$S_z = \{s \in \mathbf{R}^2: |f(s) - f(z)| < \varepsilon_0\},$$

$$T_z = \{t: |f(t) - f(z)| \geqslant 2\varepsilon_0\},$$

若 $T_z \neq \varnothing$,则$|f(S_z)-f(T_z)| \geqslant \varepsilon_0$,从而 $d(S_z,T_z)>0$.

选取正数列$\{\delta_n\}$,$\{x_n\}$,$\{y_n\}$如下:

选 $\delta_1=1$. 取 x_1,y_1 使得 $d(x_1,y_1)<\delta_1$, $|f(x_1)-f(y_1)| \geqslant 3\varepsilon_0$, $\cdots$. 对 δ_n,x_n,y_n,选 $\delta_{n+1}>0$,且 $\delta_{n+1}<\min\{\delta_n/2, d(S_{x_n},T_{x_n}), d(S_{y_n},T_{y_n})\}$,取 x_{n+1},y_{n+1},使得

$$d(x_{n+1},y_{n+1}) < \delta_{n+1}, \quad |f(x_{n+1}) - f(y_{n+1})| \geqslant 3\varepsilon_0.$$

记 $A=\{x_n\}$,$B=\{y_n\}$,由 $\delta_n \to 0 (n\to\infty)$可知,$d(A,B)=0$,

现在设 $m<n$,且假定$|f(x_n)-f(y_m)|<\varepsilon_0$,也即 $x_n \in S_{y_m}$. 由于

$$d(S_{y_m},T_{y_m}) > \delta_n > d(x_n,y_n),$$

故 $y_n \overline{\in} T_{y_m}$,或者$|f(y_n)-f(y_m)|<2\varepsilon_0$. 因此,我们有

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(y_n)| &\leqslant |f(x_n) - f(y_m)| \\ &\quad + |f(y_m) - f(y_n)| \\ &< 3\varepsilon_0.\end{aligned}$$

以及$|f(x_n)-f(y_n)| \geqslant 3\varepsilon_0$. 对 $m>n$ 可类似地推理,而 $m=n$ 已证. 这说明 $d(f(A),f(B) \geqslant \varepsilon_0$,与题设矛盾,即得所证.

(2) 设 $x,y \in \mathbf{R}^2$,对任给 $\varepsilon>0$; $\varepsilon<d(x,y)$,取 $r \in \mathbf{Q}$,使得 $d(x,y)-\varepsilon<r<d(x,y)$. 再选 $r' \in \mathbf{Q}$: $r'<\varepsilon$,且 $r+r'>d(x,y)$. 从而知$B(x,r) \cap B(y,r') \neq \varnothing$. 令 z 满足 $d(x,z)=r$, $d(y,z)=r'$,则

$$d(f(x),f(z)) = r, \quad d(f(y),f(z)) = r'.$$

由此可得

$$\begin{aligned} r - r' &= d(f(x),f(z)) - d(f(y),f(z)) \\ &\leqslant d(f(x),f(y)) \\ &\leqslant d(f(x),f(z)) + d(f(y),f(z)) \\ &= r + r', \end{aligned}$$

$$d(x,y) - 2\varepsilon < d(f(x),f(y)) < d(x,y) + \varepsilon.$$

即得所证.

第二章 Lebesgue 测度

§2.1 点集的 Lebesgue 外测度

基本内容

定义 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数个开矩体，且有

$$E\subset\bigcup_{k\geqslant 1}I_k,$$

则称 $\{I_k\}$ 为 E 的一个 **L-覆盖**（显然这样的覆盖有很多，且每一个 L-覆盖 $\{I_k\}$ 确定一个非负广义实值 $\sum_{k\geqslant 1}|I_k|$（可以是 $+\infty$，$|I_k|$ 表示 I_k 的体积），我们称

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k\geqslant 1}|I_k|:\ \{I_k\}\text{ 为 }E\text{ 的 }L\text{-覆盖}\right\}$$

为点集 E 的 Lebesgue **外测度**.

显然，若 E 的任意的 L-覆盖 $\{I_k\}$ 均有

$$\sum_{k\geqslant 1}|I_k|=\infty,$$

则 $m^*(E)=\infty$，否则 $m^*(E)<\infty$.

定理 1（$\mathbf{R}^n$ 中点集的外测度性质）

(i) 非负性：$m^*(E)\geqslant 0$，$m^*(\varnothing)=0$；

(ii) 单调性：若 $E_1\subset E_2$，则 $m^*(E_1)\leqslant m^*(E_2)$；

(iii) 次可加性：$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$.

引理 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 以及 $\delta>0$. 令

$$m_\delta^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\ \bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E,\text{每个开矩体 }I_k\text{ 的边长}<\delta\right\},$$

则 $m_\delta^*(E)=m^*(E)$.

定理 2 设 E_1,E_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个点集. 若 $d(E_1,E_2)>0$，则

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2).$$

定理 3（平移不变性） 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$x_0\in\mathbf{R}^n$. 记 $E+\{x_0\}=\{x+x_0,x\in E\}$，则

$$m^*(E+\{x_0\})=m^*(E).$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) $\mathbf{R}^n$ 中单点集的外测度为零，即 $x_0\in\mathbf{R}^n$，则 $m^*(\{x_0\})=0$.

(2) 设 $I\subset\mathbf{R}^n$ 是开矩体，$\bar{I}$ 是闭矩体，则 $m^*(I)=m^*(\bar{I})=|I|$（I 的体积）.

(3) 若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可数点集，则 $m^*(E)=0$.

(4) $[0,1]$中的 Cantor 集 C 的外测度为 0.

(5) 设 $E\subset[a,b]$，$m^*(E)>0$，$0<c<m^*(E)$，则存在 E 的子集 A，使得 $m^*(A)=c$.

(6)（数乘的情形）设 $E\subset\mathbf{R}^1$，对 $\lambda\in\mathbf{R}^1$，记 $\lambda E=\{\lambda x:\ x\in E\}$，则 $m^*(\lambda E)=|\lambda|m^*(E)$.

证明 (1)，(2)，(3) 证略.

(4) 事实上，因为

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n,$$

其中的 F_n（在构造 C 的过程中第 n 步所留存下来的）是 2^n 个长度为 3^{-n}的闭区间之并集，所以我们有

$$m^*(C)\leqslant m^*(F_n)\leqslant 2^n\cdot 3^{-n},$$

从而得知 $m^*(C)=0$.

(5) 记 $f(x)=m^*([a,x)\cap E)$，$a\leqslant x\leqslant b$，则 $f(a)=0$，$f(b)=m^*(E)$. 考察 x 与 $x+\Delta x$，不妨设 $a\leqslant x<x+\Delta x\leqslant b$，则由

$$[a,x+\Delta x)\cap E=([a,x)\cap E)\cup([x,x+\Delta x)\cap E)$$

可知，$f(x+\Delta x)\leqslant f(x)+\Delta x$，即

$$f(x+\Delta x)-f(x)\leqslant\Delta x.$$

对 $\Delta x<0$ 也可证得类似不等式. 总之，我们有

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|\leqslant|\Delta x|,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

这说明 $f\in C([a,b])$，根据连续函数中值定理，对于 $f(a)<c<f(b)$，必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$. 从而取 $A=[a,\xi)\cap E$，即得所证.

(6) 因为 $E\subset\bigcup_{n\geqslant 1}(a_n,b_n)$等价于 $\lambda E\subset\bigcup_{n\geqslant 1}\lambda(a_n,b_n)$，$m^*([a_n,b_n])=m^*((a_n,b_n))$，且对任一区间$(\alpha,\beta)$，有

$$m^*(\lambda(\alpha,\beta)) = |\lambda|m^*((\alpha,\beta)) = |\lambda|(\beta-\alpha),$$

所以按外测度定义可得 $m^*(\lambda E)=|\lambda|m^*(E)$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m^*(A)=0$，则对任意的 $B\subset\mathbf{R}^n$，有

$$m^*(A\cup B) = m^*(B) = m^*(B\setminus A).$$

(2) 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，且 $m^*(A),m^*(B)<\infty$，则

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leqslant m^*(A\triangle B);$$

(3) 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$. 若 $m^*(A\triangle B)=0$，则 $m^*(A)=m^*(B)$.

(4) 设 A，B 与 C 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，且有 $m^*(A\triangle B)=0$，$m^*(B\triangle C)=0$，则 $m^*(A\triangle C)=0$.

(5) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若对任意的 $x\in E$，存在开球 $B(x,\delta_x)$，使得 $m^*(E\cap B(x,\delta_x))=0$，则 $m^*(E)=0$.

证明 (1) 注意，我们有不等式：

$$m^*(A\cup B)\leqslant m^*(A)+m^*(B)=m^*(B)\leqslant m^*(A\cup B),$$

$$\begin{aligned}m^*(B) &\leqslant m^*(B\setminus A)+m^*(B\cap A)\\ &\leqslant m^*(B\setminus A)+m^*(A)=m^*(B\setminus A)\leqslant m^*(B).\end{aligned}$$

(2) 因为 $A\subset B\cup(A\triangle B)$，所以 $m^*(A)\leqslant m^*(B)+m^*(A\triangle B)$. 从而可知 $m^*(A)-m^*(B)\leqslant m^*(A\triangle B)$. 类似地，又可得 $m^*(B)-m^*(A)\leqslant m^*(A\triangle B)$. 综合此两结论，即得所证.

(3) 由 $m^*(A)\leqslant m^*(B)+m^*(A\triangle B)=m^*(B)$ 可知，$m^*(A)\leqslant m^*(B)$. 又由 $m^*(B)\leqslant m^*(A)+m^*(A\triangle B)$ 可得 $m^*(B)\leqslant m^*(A)$. 证毕.

(4) 注意到公式

$$(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C),$$

$$A\cap C\supset A\cap B\cap C,\quad A\cup C\subset A\cup B\cup C,$$

可知 $(A\cup C)\setminus(A\cap C)\subset(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$. 从而有

$$m^*(A\triangle C)\leqslant m^*(A\triangle B)+m^*(B\triangle C)=0.$$

(5) 依题设可知，存在 E 的可数覆盖球列 $\{B_k\triangleq B(x_k,\delta_{x_k})\}$，使得 $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$，且 $m^*(E\cap B_k)=0$. 从而知

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap B_k), \quad m^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E \cap B_k) = 0.$$

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $E \subset \mathbf{R}^n$，试证明存在 G_δ 集 $\widetilde{G}$：$\widetilde{G} \supset E$ 且 $m^*(\widetilde{G}) = m^*(E)$.

(2) 设 $E_k \subset \mathbf{R}^n (k \in \mathbf{N})$. 若 $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) < +\infty$，则 $m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) = 0$.

(3) 设定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $(\lambda_n > 0, n \in \mathbf{N})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) < +\infty \quad (E_n = \{x \in \mathbf{R}^1 : |f_n(x)|/\lambda_n > 1\}),$$

则存在 $Z \subset \mathbf{R}^1$ 且 $m(Z) = 0$，使得 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)|/\lambda_n \leqslant 1 (x \in \mathbf{R}^1 \setminus Z)$.

证明 (1) 依定义，对 $k \in \mathbf{N}$，存在矩体列 $\{I_{k,i}\}$，使得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{k,i} \supset E$，且有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_{k,i}| \leqslant m^*(E) + 1/k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

令 $\widetilde{G}_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{k,i} (k \in \mathbf{N})$，$\widetilde{G} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{G}_k$，易知 $\widetilde{G} \supset E$ 且 $\widetilde{G}$ 是 G_δ 集. 我们有（对 $k \in \mathbf{N}$）

$$m^*(E) \leqslant m^*(\widetilde{G}) \leqslant m^*(\widetilde{G}_k) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_{k,i}| \leqslant m^*(E) + \frac{1}{k},$$

令 $k \to \infty$ 即得 $m^*(E) = m^*(\widetilde{G})$.

(2) 注意 $\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$，且依题设知，对任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得 $\sum_{k=N}^{\infty} m^*(E_k) < \varepsilon$. 从而对任意 $j \in \mathbf{N}$，有

$$m^*\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) \leqslant m^*\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} m^*(E_k).$$

由此知 $m^*\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} m^*(E_k) < \varepsilon$. 证毕.

(3) 令 $Z = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$，则由题设知 $m(Z) = 0$. 因此当 $x \in \mathbf{R}^1 \setminus Z$ 时，必存在 n_0，使得 $x \overline{\in} E_n (n \geqslant n_0)$. 从而有 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)|/\lambda_n \leqslant 1 (x \in \mathbf{R}^1 \setminus Z)$.

§ 2.2 可测集与测度

基本内容

定义 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若对任意的点集 $T\subset\mathbf{R}^n$,有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c),$$

则称 E 为 Lebesgue 可测集(或 m^*-可测集),简称为**可测集**,其中 T 称为**试验集**(这一定义可测集的等式也称为 Carathéodory 条件);可测集的全体称为**可测集类**,简记为 $\mathscr{M}$.

注 注意到下述简单事实是方便的:即对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一点集 E,为了证明它是一个可测集,我们只需对任一点集 $T\subset\mathbf{R}^n$ 证明

$$m^*(T)\geqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c) \tag{*}$$

即可. 这是因为 $m^*(T)\leqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$ 总是成立的. 由此又可知,只需对 $m^*(T)<\infty$ 的 T 来论证(*)式即可,因为在 $m^*(T)=\infty$ 时(*)式总成立.

下列初等性质成立:

(i) 若 $m^*(E)=0$,则 $E\in\mathscr{M}$;

(ii) 若 $S\in\mathscr{M}$,且 $E_1\subset S$,$E_2\subset S^c$,则

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2).$$

定理 1(可测集的性质)

(i) $\varnothing\in\mathscr{M}$;　　(ii) 若 $E\in\mathscr{M}$,则 $E^c\in\mathscr{M}$;

(iii) 若 $E_1\in\mathscr{M}$,$E_2\in\mathscr{M}$,则 $E_1\cup E_2$,$E_1\cap E_2$ 以及 $E_1\setminus E_2$ 皆属于 $\mathscr{M}$;(由此知,可测集任何有限次取交、并运算后所得的集皆为可测集.)

(iv) 若 $E_i\in\mathscr{M}$ $(i=1,2,\cdots)$,则其并集也属于 $\mathscr{M}$;若进一步有 $E_i\cap E_j=\varnothing$ $(i\neq j)$,则 $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(E_i)$. (即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足可数可加性或称为 σ-可加性.)

从定理的结论(i),(ii)以及(iv)可知,$\mathbf{R}^n$ 中可测集类构成一个 σ-代数. 对于可测集 E,其外测度称为**测度**,记为 $m(E)$,这就是通常所说的 $\mathbf{R}^n$ 上的 **Lebesgue 测度**.

定理 2(递增可测集列的测度运算) 若有递增可测集合列 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\cdots$,则 $m\left(\lim\limits_{k\to\infty}E_k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$.

定理 3(递减可测集列的测度运算) 若有递减可测集合列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k$

$\supset \cdots$ 且 $m(E_1)<\infty$，则 $m\left(\lim\limits_{k\to\infty} E_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} m(E_k)$.

推论 设 $\{E_k\}$ 是可测集列，则 $m\left(\varliminf\limits_{k\to\infty} E_k\right) \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} m(E_k)$.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset \mathbf{R}^1$，$0\neq\lambda\in\mathbf{R}^1$. 记 $\lambda E=\{\lambda x: x\in E\}$. 若 $E\in\mathscr{M}$，则 $\lambda E\in\mathscr{M}$.

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若存在 $\mathbf{R}^n$ 中可测集 A，使得 $m^*(E\triangle A)=0$，则 $E\in\mathscr{M}$，且有 $m(E)=m(A)$.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 则 $E\in\mathscr{M}$ 的充分必要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在可测集 $A,B\subset\mathbf{R}^n$：$A\subset E\subset B$，使得 $m(B\setminus A)<\varepsilon$.

(4) 设 $A_1,A_2\subset\mathbf{R}^n$，$A_1\subset A_2$，$A_1$ 是可测集且有 $m(A_1)=m^*(A_2)<\infty$，则 A_2 是可测集.

(5) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若对任给 $\varepsilon>0$，均存在 $A\in\mathscr{M}$，使得 $m^*(E\triangle A)<\varepsilon$，则 $E\in\mathscr{M}$.

证明 (1) 因为对任意的试验集 $T\subset\mathbf{R}^1$，有

$$T\cap\lambda E=\lambda(\lambda^{-1}T\cap E),\quad T\cap(\lambda E)^c=\lambda(\lambda^{-1}T\cap E^c),$$

所以可得

$$\begin{aligned} & m^*(T\cap\lambda E)+m^*(T\cap(\lambda E)^c) \\ & \qquad = |\lambda|[m^*(\lambda^{-1}T\cap E)+m^*(\lambda^{-1}T\cap E^c)]. \end{aligned}$$

这说明 E 的可测性等价于 λE 的可测性.

(2) 注意，依题设知 $m^*(E\setminus A)=m^*(A\setminus E)=0$，而我们有 $E=[A\setminus(E\setminus A)]\cup(A\setminus E)$，即得所证.

(3) 只需指出充分性成立即可：对任一试验集 $T\subset\mathbf{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned} m^*(T) & \leqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c) \\ & \leqslant m^*(T\cap B)+m^*(T\cap A^c) \\ & \leqslant m^*(T\cap A)+m^*(T\cap(B\setminus A))+m^*(T\cap A^c) \\ & = m^*(T)+m^*(T\cap(B\setminus A))\leqslant m^*(T)+\varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$，可知 $m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$，即 E 可测.

(4) 由题设知

$m(A_1) = m^*(A_2) = m^*(A_1 \cup (A_2\backslash A_1)) = m^*(A_1) + m^*(A_2\backslash A_1)$,
故可得 $m^*(A_2\backslash A_1)=0$. 从而 $A_2\backslash A_1$ 是可测集，即 A_2 是可测集.

(5) 依题设知，对任给 $\varepsilon>0$，看 $\varepsilon/2^k(k\in\mathbf{N})$，存在可测集列 $\{A_k\}$，使得$m^*(E\triangle A_k)<\varepsilon/2^k(k\in\mathbf{N})$，即有 $m^*(E\backslash A_k)<\varepsilon/2^k$，$m^*(A_k\backslash E)<\varepsilon/2^k(k\in\mathbf{N})$. 现在令 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，则 A 是可测集，且有

$$E\backslash A = \bigcap_{k=1}^{\infty}(E\backslash A_k),\quad A\backslash E = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\backslash E),$$

$$m^*(E\backslash A) \leqslant m^*(E\backslash A_k)(k\in\mathbf{N}),\quad m^*(A\backslash E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}m^*(A_k\backslash E),$$

$$m^*(E\backslash A) \leqslant \varepsilon/2^k(k\in\mathbf{N}),\quad m^*(A\backslash E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，可知 $m^*(E\backslash A)=0=m^*(A\backslash E)$，即 $m^*(E\triangle A)=0$. 根据题(2)，E 是可测集.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $A\in\mathscr{M}$，则对任意的 $B\subset\mathbf{R}^n$，必有

$$m^*(A\cup B) + m^*(A\cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

(2) 设 A,B,C 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集. 若有 $m(A\triangle B)=0, m(B\triangle C)=0$，则 $m(A\triangle C)=0$.

(3) 设 $E\subset[0,1]$. 若 $m(E)=1$，试证明 $\overline{E}=[0,1]$；若 $m(E)=0$，则 $\mathring{E}=\varnothing$.

(4) 设 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是$[0,1]$中的可测集，且有 $\sum_{i=1}^{k}m(E_i) > k-1$，则 $m\left(\bigcap_{i=1}^{k}E_i\right)>0$.

证明 (1) 因为 A 可测，所以我们有(不妨假定 $m^*(A)<+\infty$)

$$\begin{aligned} m^*(B) &= m^*(B\cap A) + m^*(B\cap A^c), \\ m^*(B\cup A) &= m^*((B\cup A)\cap A) + m^*((B\cup A)\cap A^c) \\ &= m^*(A) + m^*(B\cap A^c). \end{aligned}$$

由此可知 $m^*(B\cap A^c)=m^*(B\cup A)-m^*(A)$，从而得

$$m^*(B) = m^*(B\cap A) + m^*(B\cup A) - m^*(A).$$

移项后即得所证.

(2) 注意 $A\setminus C = A\cap C^c\cap(B\cup B^c)$

$$=[A\cap(B\setminus C)]\cup[C^c\cap(A\setminus B)].$$

(3) 证略.

(4) 令 $A_i=[0,1]\setminus E_i(i=1,2,\cdots,k)$,则可得

$$\bigcap_{i=1}^{k}E_i=[0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{k}A_i,\quad m\left(\bigcap_{i=1}^{k}E_i\right)=1-m\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right).$$

注意到

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}m(A_i)=\sum_{i=1}^{k}(1-m(E_i))$$

$$=k-\sum_{i=1}^{k}m(E_i)<k-(k-1)=1,$$

即知 $m\left(\bigcap_{i=1}^{k}E_i\right)>0$.

例 3 解答下列命题:

(1) 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集列,若 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)<\infty$, 试证明

$$m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k\right)\geqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k).$$

(2) 设 $\{E_n\}$ 是 $[0,1]$ 中互不相同的可测集合列,且存在 $\varepsilon>0$, $m(E_n)\geqslant\varepsilon\ (n=1,2,\cdots)$. 试问是否存在子列 $\{E_{n_i}\}$,使得

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{n_i}\right)>0?$$

(3) 设 $\{E_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集列,且满足 $\overline{\lim_{n\to\infty}}m(E_n)=1$, 试证明对任意的 α: $0<\alpha<1$,必存在 $\{E_{n_k}\}$,使得 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\right)>\alpha$.

(4) 设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列,$B_n\subset A_n(n=1,2,\cdots)$,试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(B_n).$$

(5) 设有 $\mathbf{R}^1$ 中可测集列 $\{E_k\}$,且当 $k\geqslant k_0$ 时,$E_k\subset[a,b]$. 若存在 $\lim_{k\to\infty}E_k=E$,试证明: $m(E)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)$.

解 (1) 因为我们有 $\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k=\lim_{j\to\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k$. 所以

$$m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k\right)=\lim_{j\to\infty}m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k\right)\geqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k).$$

注 (i) 令 $E_n=(0,2)$(n 是奇数),$E_n=(1,3)$(n 是偶数),则 $\underline{\lim}_{n\to\infty}E_n=(1,2]$,$\overline{\lim}_{n\to\infty}E_n=(0,3]$,且有

$$m\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\right)<\underline{\lim_{n\to\infty}}m(E_n),\quad m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n\right)>\overline{\lim_{n\to\infty}}m(E_n).$$

(ii) 令 $E_n=(0,1/n)\times[0,n]$($n\in\mathbf{N}$),则有

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\varnothing,\quad m(E_n)=1,\quad \lim_{n\to\infty}m\left(\lim_{n\to\infty}E_n\right)=0,$$

$$m\left(\bigcup_{k\geqslant m}E_k\right)=1+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots=+\infty.$$

(2) 不一定. 例如作点集列: $E_n(n\in\mathbf{N})$,

$E_n=\{x\in[0,1]$: x 的十进位小数表示式中,第 n 位数字 $\neq 0\}$,

易知 $m\left(\bigcap_{i=1}^{k}E_{n_i}\right)=(9/10)^k$.

(3) 由题设知,对任意的 $k\in\mathbf{N}$,存在 $\{n_k\}$,使得

$$m(E_{n_k})>1-(1-\alpha)/2^k\quad(k\in\mathbf{N}).$$

由此知 $1-m(E_{n_k})<(1-\alpha)/2^k(k\in\mathbf{N})$. 从而得到

$$[0,1]\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}([0,1]\setminus E_{n_k}),$$

$$m\left([0,1]\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m([0,1]\setminus E_{n_k})$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(1-m(E_{n_k}))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)/2^k=1-\alpha,$$

故有 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\right)>\alpha$.

(4) 只需指出左端大于等于右端. 在公式

$$\sum_{n=1}^{N}m^*(B_n)=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N}B_n\right)\leqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)$$

中,令 $N\to\infty$,即得所证.

(5) $m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)\geqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k)\geqslant\underline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k)\geqslant m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)$.

例 4 解答下列命题:

(1) 设$\{E_k\}$是$[0,1]$中的可测集列，$m(E_k)=1$ $(k=1,2,\cdots)$，试证明 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=1$.

(2) 试作$[0,1]$中的第二纲集 E：$m(E)=0$.

证明 (1) 由题设知 $m([0,1]\setminus E_k)=0(k\in\mathbf{N})$，又有

$$m\left([0,1]\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}([0,1]\setminus E_k)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m([0,1]\setminus E_k)=0.$$

由此得 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=1$.

(2) 令$[0,1]\cap\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，以及

$$I_{n,k}=\left(r_n-\frac{1}{2^{n+k}},\ r_n+\frac{1}{2^{n+k}}\right)\quad(n,k\in\mathbf{N}),$$

则点集$(-\infty,+\infty)\setminus\bigcup_{n,k=1}^{\infty}I_{n,k}$在 $\mathbf{R}^1$ 中无处稠密. 我们有

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{n,k}\right)=0,$$

$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{n,k}$是第二纲集.

例 5 解答下列问题：

(1) 将$(0,1)$中的数用十进位小数展开，求下列点集 E 之测度 $m(E)$.

(i) 在指定小数位置上是数字 4 的点之全体 E.

(ii) 在指定两个小数位置上都是已给定的数字之全体 E.

(iii) 在两个指定小数位置上是不同的数字之全体 E.

(2) 将$(0,1)$中的数用十进位小数展开，在表示式中总有数字“0”出现的数的全体为 E，求 $m(E)$.

(3) 在$[0,1]$中作点集

$E=\{x\in[0,1]$：在十进位小数表示式 $x=0.a_1a_2\cdots$中的所有 a_i 都不出现 10 个数字中的某一个$\}$，

试证明 E 是不可数集，且 $m(E)=0$.

(4) 将$(0,1)$中的点用十进位小数展开，令表示式中不超过 9 个数字的点的全体为 E，求 $\overline{E}$ 以及 $m(E)$.

(5) 将$[0,1]$中的点用十进位小数展开，令

$$E = \{x \in [0,1]: x \text{ 的任一位小数是 } 2 \text{ 或 } 7\},$$

试问：(i) E 是闭集？(ii) E 是开集？(iii) E 是可数集？(iv) $\bar{E}=[0,1]$？(v) E 是可测集？ $m(E)=$？

解 (1) (i) $m(E)=1/10$. (ii) $m(E)=1/100$.

(iii) $m(E)=1/2$.

(2) 对任意的 $n\in\mathbf{N}$，作点集

$$E_n = \{x \in (0,1): x \text{ 的小数展开式中前 } n \text{ 位数字不出现 } 0\},$$

则
$$m(E) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9^2}{10^3} + \cdots = 1.$$

(3) 作点集(记 $k=0,1,2,\cdots,9$)

$$E_k = \{x \in [0,1]: \text{在十进位小数表示式 } x = 0.a_1a_2\cdots \text{ 中的所有 } a_i \text{ 都不出现数字 } k\},$$

易知，$E=\bigcup\limits_{k=0}^{9} E_k$，$E_k\sim[0,1]$ $(k=0,1,2,\cdots,9)$.

现在，首先把$[0,1]$作 10 等分，并舍去其中的 $\left[\frac{k}{10},\frac{k+1}{10}\right)$ $(k=0,1,2,\cdots,9)$，即舍去第 $k+1$ 个子区间，则在剩余区间中的点其十进位小数式中第一位小数就不会出现 k 了. 其次，把剩余的 9 个子区间中的每一个再作 10 等分，并再舍去第 $k+1$ 个，……如此进行下去，就得出 E_k. 易知，舍去的子区间之总长度为

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9^2}{10^3} + \cdots = 1,$$

由此可得 $m(E_k)=0$.

(4) 令 $E_j=\{x\in(0,1): x \text{ 的小数展开式中不含数字 } j\}$ $(j=0,1,\cdots,9)$，则 $E=\bigcup\limits_{j=0}^{9} E_j$. 注意到把$[0,1]$中的数以九进位小数展开时，就可知 E_j 与$[0,1]$是对等的，即 $\overline{\overline{E}}_j=c$ $(j=0,1,2,\cdots,9)$.

此外，将$[0,1]$作 10 等分，并舍去区间$[k/10,(k+1)/10)$ $(k=0,1,2,\cdots,9)$的第 $j+1$ 个，则在余下的点的小数表示式中不出现(第一位) j. 再将余下的区间又各 10 等分，又舍去第 $j+1$ 个，等等，留下了 E_j. 易知共舍去之区间总长为

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9^2}{10^3} + \cdots = \frac{1}{10}\left(1\bigg/\left(1-\frac{9}{10}\right)\right) = 1,$$

即 $m(E_j)=0, m(E)=0$.

(5) (i) 设 $\{x_k\}\subset E$: $x_k\to x(k\to\infty)$,且令

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n/10^n,\quad 若 |x_k-x|<1/10^p,则 b_p=2 或 7.$$

故 $x\in E$,即 E 是闭集.

(ii) 注意到(i)以及 $E\neq[0,1]$,可知 E 不是开集.

(iii) $\overline{\overline{E}}=c$,$E$ 不是可数集.

(iv) 由 E 是闭集以及 $E\neq[0,1]$,可知 E 不在$[0,1]$中稠密.

(v) E 是可测集(见§2.3). $m(E)=1-0.8\times\sum_{m=0}^{\infty}(2/10)^m=0$.

例 6 试证明下列命题:

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$,且存在 q: $0<q<1$,使得对任一区间(a,b),都有开区间列$\{I_n\}$:

$$E\cap(a,b)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}m(I_k)<(b-a)q.$$

则 $m(E)=0$.

(2) 设 $\alpha>2$,作 $\mathbf{R}^1$ 中点集:

$$E=\{x: 存在无限个分数 p/q, p 与 q 是互素的自然数,\ 使得 |x-p/q|<1/q^{\alpha}\},$$

则 $m(E)=0$.

(3) 设 $E\subset[0,1)$是可测集,且 $m(E)>0$,令

$$A=\{x\in[0,1): 存在 n\in\mathbf{N} 以及 t\in E, 使得 x=\{nt\}\},$$

($\{nt\}$是 nt 的小数部分)则 $m(A)=1$.

(4) 在$[0,1]$上进行操作如下:

(i) 将其等分为 m_1 个子区间,并舍去 k_1 个长为 $1/m_1$ 的子区间(其中 $k_1<m_1$);

(ii) 对剩下的每个子区间,又将其等分为 m_2 个小子区间,并舍去 $k_2(k_2<m_2)$个长为 $1/m_2$ 的小子区间;

(iii) 继续按此法作下去,可得$\{k_n\}$,$\{m_n\}$,$k_n<m_n(n\in\mathbf{N})$,并记最后剩余之点集为 E,

则当 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-k_n/m_n)=0$ 时,有 $m(E)=0$.

证明 (1) 因为 $m^*(E)=m^*\left(E\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(E\cap I_n)$，所以只需指出对任意的$(a,b)$，有 $m^*(E\cap(a,b))=0$. 由题设知，存在 $I_n=(a_n,b_n)(n\in\mathbf{N})$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supset E\cap(a,b)$，使得$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\leqslant q(b-a)$. 再对每个$(a_n,b_n)$作覆盖，其总长度小于 $q(b_n-a_n)$. 依此程序继续作下去，可得(对任意 $k\in\mathbf{N}$)

$$m^*(E\cap(a,b))\leqslant q\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\leqslant q^2(b-a)\cdots\leqslant q^k(b-a),$$

由此易知 $m^*(E\cap(a,b))=0$.

(2) 只需指出 $m(E_1)=m(E\cap(0,1])=0$. 记在 p,q 固定时 E_1 中之点集为 $E_{p,q}$，又记 $E_q=\bigcup_{p=1}^{q}E_{p,q}$，注意到在 $x\in E_1$ 时，存在无穷多个 q，使得 $x\in E_q$，故有 $x\in\overline{\lim_{q\to\infty}}E_q$，由此知 $E\subset\overline{\lim_{q\to\infty}}E_q$.

此外，由 $m(E_{p,q})=2/q^{\alpha}$ 可知，$m(E_q)\leqslant 2q/q^{\alpha}=2/q^{\alpha-1}$. 从而我们有$\sum_{q=1}^{\infty}m(E_q)<+\infty$. 因此 $m\left(\overline{\lim_{q\to\infty}}E_q\right)=0$，也就有 $m(E)=0$.

注 设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$，作点集

$$E=\{x\in(0,1):\text{存在无限个既约分数 }p/q,p\text{ 与 }q\text{ 是互素的自然数,使得 }|x-p/q|<a_q/q\},$$

则 $m(E)=0$.$\Big($考查 $E_q=\bigcup_{p=0}^{q}((p-a_q)/q,(p+a_q)/q)(q\in\mathbf{N})$，易知 $E\subset\bigcup_{q\geqslant m}E_q$(任意 $m\in\mathbf{N}$).$\Big)$

(3) 依题设知，对任给 $\varepsilon>0$，存在开区间列$\{I_k\}$，使得$\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E$，$\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k)<(1-\varepsilon/2)^{-1}m(E)$. 从而存在 I_{k_0}，

$$m(I_{k_0}\cap E)>(1-\varepsilon/2)m(I_{k_0}).$$

取有理数 r_0,r_1，使 $J\triangleq(r_0,r_1)\supset I_{k_0}$，且 $m(J)<(1-\varepsilon/2)^{-1}m(I_{k_0})$，则有

$$m(J\cap E)\geqslant m(I_{k_0}\cap E)>(1-\varepsilon)\cdot m(J).$$

令 $x_0=a/n,x_1=b/n,J_l=(l/n,(l+1)/n)$，其中 l 满足：$a\leqslant l\leqslant b-1$，使得$m(J_l\cap E)\geqslant(1-\varepsilon)m(J_l)$. 因此，记 $H=\{x\in[0,1)：x/n\in J_l\cap E\}$，则 $m(H)\geqslant 1-\varepsilon$. 注意到 $H\subset A$，故 $m(A)\geqslant 1-\varepsilon$. 由 ε 之任意性，知 $m(A)=1$.

(4) (i) 第一次在舍去 k_1 个子区间后，剩下的部分之总长度为 $1-k_1/m_1$. (ii) 在第二次舍去 k_2 个子区间后，剩下部分之总长度为

$$1-\frac{k_1}{m_1}-\frac{k_2(m_1-k_1)}{m_1m_2}=\left(1-\frac{k_1}{m_1}\right)\left(1-\frac{k_2}{m_2}\right).$$

…. 对第 n 次过程后，剩下总长为

$$\left(1-\frac{k_1}{m_1}\right)\left(1-\frac{k_2}{m_2}\right)\cdots\left(1-\frac{k_n}{m_n}\right).$$

…. 由此即得所证.

例 7 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集，$x_0\in\mathbf{R}^n$，则 $E+\{x_0\}$是可测集，且

$$m(E+\{x_0\})=m(E).\quad\text{(可测集的平移不变性)}$$

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集，且 $a\in\mathbf{R}^1,\delta>0$. 若对于满足 $|t|<\delta$ 的 $t\in\mathbf{R}^1$，均有 $a+t\in E$ 或 $a-t\in E$，则 $m(E)\geqslant\delta$.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m(E)>0$. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是稠密的可列集，则

$$m\left(\mathbf{R}^n\setminus\bigcup_{a\in D}(\{a\}+E)\right)=0.$$

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$. 若对任意的 $x\in\mathbf{R}^1$，均有 $m(E\triangle(E+\{x\}))=0$，则

(i) $m(E^c\triangle(E^c+\{x\}))=0(x\in\mathbf{R}^1)$；

(ii) $m(E)\cdot m(E^c)=0$.

(5) 设 $E\subset[0,1]$是可测集，$m(E)>0$，则存在 n 个互不相交可测集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$E=\bigcup_{i=1}^n E_i,\quad m(E_i)=m(E)/n\ (i=1,2,\cdots,n).$$

(6) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集，且 $m(E)<+\infty$，则

$$\lim_{x\to+\infty}m((E+\{x\})\cap E)=0.$$

证明 (1) 只需指出 $E+\{x_0\}$是可测集即可. 由外测度的平移不变性可知，对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$，有

$$m^*(T)=m^*(T-\{x_0\})=m^*((T-\{x_0\})\cap E)$$

$$+ m^*((T - \{x_0\}) \cap E^c),$$

$$(T - \{x_0\}) \cap E = (T \cap (E + \{x_0\})$$

$$(T - \{x_0\}) \cap E^c = T \cap (E + \{x_0\})^c.$$

由此可得 $m^*(T)=m^*(T\cap(E+\{x_0\}))+m^*(T\cap(E+\{x_0\})^c)$. 这说明 $E+\{x_0\}$是可测集.

(2) 由题设知$(-\delta,\delta)\subset(\{a\}-E)\cup(\{a\}+E)$,再注意到平移不变性,可得 $m(E)\geqslant\delta$.

(3) 设 $t>0, I=[-t,t]^n$,只需指出 $m\left(I\setminus\bigcup_{a\in D}(\{a\}+E)\right)=0$. 对任给 $\varepsilon>0$,作方体 P 使得 $m(P\setminus E)<\varepsilon\cdot m(P)$. 易知存在 $a_i\in D(i=1,2,\cdots,N)$,使得

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{N}(P + \{a_i\}),$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} m(P + \{a_i\}) \leqslant 2 \cdot m(I).$$

从而有

$$I\setminus\bigcup_{a\in D}(E + \{a\}) \subset \bigcup_{i=1}^{N}((P + \{a_i\})\setminus(E + \{a_i\})).$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{N} m((P + \{a_i\})\setminus(E + \{a_i\})) < \sum_{i=1}^{N}\varepsilon \cdot m(P + \{a_i\})$$

$$\leqslant 2\varepsilon \cdot m(I),$$

根据 ε 的任意性,我们有 $m\left(I\setminus\bigcup_{a\in D}(E+\{a\})\right)=0$.

(4) (i) 注意 $\mathbf{R}^1\setminus(E+\{x\})=\{x\}+(\mathbf{R}^1\setminus E)$,以及 $E\triangle(E+\{x\})=(\mathbf{R}^1\setminus E)\triangle(\{x\}+(\mathbf{R}^1\setminus E))$,即得所证.

(ii) 易知对 $x\in\mathbf{R}^1$,我们有

$$m(E^c \cap (E + \{x\})) = m(E \cap (E^c + \{x\})) = 0.$$

若 $m(E)\cdot m(E^c)>0$,则存在 $p\in E, q\in\mathbf{R}^1\setminus E, a>0$,使得

$$m(E \cap (p - a, p + a)) > 1.8a,$$

$$m((\mathbf{R}^1\setminus E) \cap (q - a, q + a)) > 1.8a.$$

如果记 $x=p-q$,那么可得

$$m((\mathbf{R}^1\setminus E) \cap (q - a, q + a))$$

$$= m((\{x\} + (\mathbf{R}^1 \setminus E)) \cap (\{x\} + (q-a, q+a)))$$

$$= m((\{x\} + (\mathbf{R}^1 \setminus E)) \cap (p-a, p+a)) > 1.8a.$$

若 $|p-q| > 2a$，则 $(\{x\}+(\mathbf{R}^1\setminus E))\cap(E\cap(p-a,p+a))=\varnothing$，且有

$$(\{x\} + (\mathbf{R}^1 \setminus E)) \cap (p-a, p+a) \cap (E \cap (p-a, p+a)) = \varnothing,$$

$$\begin{aligned}2a \geqslant & m(((\{x\} + (\mathbf{R}^1 \setminus E)) \cap (p-a, p+a)) \cup (E \cap (p-a, p+a))) \\ = & m(((\{x\} + (\mathbf{R}^1 \setminus E)) \cap (p-a, p+a))) + m((E \cap (p-a, p+a))) \\ > & 3.6a,\end{aligned}$$

导致矛盾，从而结论得证.

(5) 注意 $f(x)=m(E\cap[0,x])$ 是连续函数.

(6) (i) 设 E 是有界可测集，则易知存在 $x_0>0$，使得 $(E+\{x_0\})\cap E=\varnothing$，结论自然成立.

(ii) 对一般可测集 E，可作递增紧集列 $\{E_n\}$：$E_n\subset E(n\in\mathbf{N})$ 且 $m(E_n)\to m(E)(n\to\infty)$，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} m((E + \{x\}) \cap E) \\ &= \lim_{x\to+\infty} m((E + \{x\}) \cap E) - \lim_{x\to+\infty} m((E_n + \{x\}) \cap E) \\ &= \lim_{x\to+\infty} m\{((E + \{x\}) \cap E) \setminus ((E_n + \{x\}) \cap E)\} \\ &\leqslant m(((E + \{x\}) \cap E) \setminus ((E_n + \{x\}) \cap E)).\end{aligned}$$

由此即知(令 $n\to\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} m((E + \{x\}) \cap E) \leqslant \lim_{n\to\infty} m((E + \{x\}) \setminus (E_n + \{x\})) = 0.$$

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $I=[0,1]\times[0,1]$，令

$$E = \left\{(x,y) \in I: \sin x < \frac{1}{2}, \cos(x+y) \text{ 是无理数}\right\},$$

则 $m(E)=\pi/6$.

(2) 设集合 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若对任意的 $x\in E$，存在开球 $B(x,\delta_x)$，使得 $m(E\cap B(x,\delta_x))=0$，则 $m(E)=0$.

证明 (1) 记 $[0,1]\cap\mathbf{Q}=\{r_n\}$，且作点集

$$E_n = \{(x,y) \in I: \sin x < 1/2, \cos(x+y) = r_n\} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

(或 $E_n=\{(x,y)\in I: 0\leqslant x<\pi/6; 0\leqslant y\leqslant 1, x+y=\arccos r_n\}(n\in\mathbf{N})$)
易知 $m(E_n)=0(n\in\mathbf{N})$. 注意到

$$m(\{(x,y) \in I: \sin x < 1/2\})$$
$$= m(\{(x,y) \in I: 0 \leqslant x < \pi/6, 0 \leqslant y \leqslant 1\}) = \pi/6.$$

而 $E=\{(x,y)\in I: \sin x<1/2\}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 故得 $m(E)=\pi/6$.

(2) 应用 Lindelöf 定理($\mathbf{R}^n$ 中的任一覆盖必存在可数覆盖).

例 9 设定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的函数 $f(x)$满足

$$|f(x) - f(y)| \leqslant e^{|x|+|y|}|x-y| \quad (x,y \in \mathbf{R}^1).$$

若 $E\subset\mathbf{R}^1, m(E)=0$, 则 $m(f(E))=0$.

证明 不妨假定 E 为有界集: $E\subset(-r,r)$, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在开集 G: $E\subset G\subset(-r,r)$, $m(G\setminus E)<\varepsilon$. 现在记 $G=\bigcup_{i\geqslant 1}(a_i,b_i)$(构成区间之并), 我们有

$$f((a_i,b_i)) \subset (f(a_i) - e^{2r}|b_i - a_i|,\ f(a_i) + e^{2r}|b_i - a_i|).$$

由此知 $m(f(G))\leqslant\sum_{i\geqslant 1}C\cdot e^{2r}|b_i-a_i|<C\cdot e^{2r}\cdot\varepsilon$. 从而得 $m(f(E))=0$.

§2.3 可测集与 Borel 集

基本内容

引理(Carathéodory) 设 $G\neq\mathbf{R}^n$ 是开集, $E\subset G$, 令

$$E_k = \{x \in E: d(x,G^c) \geqslant 1/k\} \quad (k = 1,2,\cdots),$$

则 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(E)$.

定理 1 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集是可测集.

推论 Borel 集是可测集.

定理 2 若 $E\in\mathscr{M}$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 我们有

(i) 存在包含 E 的开集 G, 使得 $m(G\setminus E)<\varepsilon$;

(ii) 存在含于 E 的闭集 F, 使得 $m(E\setminus F)<\varepsilon$.

定理 3 若 $E\in\mathscr{M}$, 则

(i) $E=H\setminus Z_1$, H 是 G_δ 集, $m(Z_1)=0$;

(ii) $E=K\cup Z_2$，K 是 F_σ 集，$m(Z_2)=0$.

G_δ 集，F_σ 集皆为 Borel 集，从而上述定理说明了 Lebesgue 可测集与 Borel 集的简明关系. 此处如果仅从测度的角度来看，那么上述定理指出：存在包含 E 的集 H，$m(H)=m(E)$；存在含于 E 的集 K，$m(K)=m(E)$. 我们称如此的 H 与 K 为 E 的**等测包**与**等测核**.

定理 4（外测度的正则性） 若 $E\subset\mathbf{R}^n$，则存在包含 E 的 G_δ 集 H，使得 $m(H)=m^*(E)$.（此时我们也称 H 为 E 的等测包.）

注意，若 H 是 E 的等测包，并且 $m^*(E)<\infty$，则有 $m(H)-m^*(E)=0$，但 $m^*(H\setminus E)$不一定等于零. 不过可以证明 $H\setminus E$ 中的任一可测子集皆为零测集.

推论 1 设 $E_k\subset\mathbf{R}^n$ $(k=1,2,\cdots)$，则 $m^*\left(\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k\right)\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)$.

推论 2 若$\{E_k\}$是递增集合列，则 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)$.

典型例题精解

例 1 解答下列问题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$是可测集. 若对任意$[a,b]\subset\mathbf{R}^1$，均有 $m(E\cap(a,b))\leqslant(b-a)/2$，试证明 $m(E)=0$.

(2) 设 $G\subset\mathbf{R}^1$ 是开集，试问等式 $m(G)=m(\overline{G})$成立吗？

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(E)>0$，试证明 $\overline{\overline{E}}=c$.

(4) 试问：是否存在闭集 $F\subset[a,b]$，$F\neq[a,b]$，而 $m(F)=b-a$?

解 (1) 反证法. 假定 $m(E)\neq0$，则存在 $n\in\mathbf{Z}$，使得 $m(E_n)\neq0$（令 $E_n=E\cap(n,n+1)$）. 易知对 $0<\varepsilon<m(E_n)$，存在开集 G：$G\subset(n,n+1)$，使得

$$E_n\subset G,\quad m(G)<m(E_n)+\varepsilon.$$

将 G 写成构成区间之并 $\bigcup\limits_{i\geqslant1}(a_i,b_i)$，我们有 $E_n=\bigcup\limits_{i\geqslant1}E\cap(a_i,b_i)$，以及

$$\begin{aligned}m(E_n)&=\sum_{i\geqslant1}m(E\cap(a_i,b_i))\leqslant\sum_{i\geqslant1}(b_i-a_i)/2\\&=m(G)/2<(m(E_n)+\varepsilon)/2.\end{aligned}$$

由此可知 $m(E_n)<\varepsilon$. 矛盾. 证毕.

(2) 不一定. 例如令 $\mathbf{Q}=\{r_k\}$，取 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B(r_k,1/2^k)$.

(3) 取 E 中闭集 F，使得 $m(F)>0$. 由于 F 是不可数集，故有表示

$F=P\cup Z$，其中 P 是完全集，Z 是可数集，且 $\overline{\overline{P}}=c$.

(4) 不存在. 因为 $F\neq[a,b]$，所以存在 $x_0\in(a,b)$，但 $x_0\overline{\in}F$. 注意到 F 是闭集，故存在 $\delta_0>0$，$(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\cap F=\varnothing$ 且 $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subset(a,b)$. 因此，$F\subset[a,b]\setminus(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$，即 $m(F)<b-a$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$，且 $0<\alpha<m(E)$，则存在 E 中有界闭集 F，使得 $m(F)=\alpha$.

(2) 设 $E\subset[a,b]$ 是可测集，$\{I_k\}$ 是一列开区间且满足 $m(E\cap I_k)\geqslant 2|I_k|/3(k\in\mathbf{N})$. 若令 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$，则 $m(E\cap G)\geqslant m(G)/3$.

证明 (1) 不妨设 $E\subset[-n,n]$，并作 E 中闭集 K，使得 $m(K)>\alpha$. 我们考查 $f(x)=m(K\cap[-n,x])$，易知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，且有 $f(-n)=0$，$f(n)>\alpha$. 从而知存在 $x_0\in(-n,n)$，使得 $f(x_0)=\alpha$. 令 $F=K\cap[-n,x_0]$，则 $F\subset E$ 且 $m(F)=\alpha$.

注 若上述操作是对 $E\setminus Q$ 做的，则最后之闭集 F 是无内点的.

(2) 对任给 $\varepsilon>0$，可选 $I_{k_i}(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $m\left(\bigcup_{i=1}^{n}I_{k_i}\right)>m(G)-\varepsilon$，且 $[a,b]$ 中不存在同时属于三个 I_{k_i} 之点. 从而我们有

$$m(E\cap G)\geqslant m\left(E\cap\bigcup_{i=1}^{n}I_{k_i}\right)=m\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap I_{k_i})\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2|I_{k_i}|/3=\sum_{i=1}^{n}|I_{k_i}|/3\geqslant m(G)/3-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，可知 $m(E\cap G)\geqslant m(G)/3$.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一族开球，记 $G=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$. 若有 $0<\lambda<m(G)$，则存在有限个互不相交的开球 $B_{\alpha_1},B_{\alpha_2},\cdots,B_{\alpha_j}$，使得

$$\sum_{i=1}^{j}m(B_{\alpha_i})>\lambda/3^n.$$

(2) 设 $G\subset\mathbf{R}^n$ 是有界开集，则存在球列 $\{B_i\}$：$B_i\subset G(i\in\mathbf{N})$，$\sum_{i=1}^{\infty}m(B_i)^p<\infty(p>1)$，使得 $G=\overline{\lim_{i\to\infty}}B_i$.

(3) $\mathbf{R}^2$ 中任一开集 G 可表为：$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\cup Z$，其中 $\{B_n\}$ 是互不相交的圆列，$m(Z)=0$.

证明 (1) 作 G 内有界闭集 F，使得 $m(F)>\lambda$. 从而存在 $B_{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,k)$（按半径大小排序，$B_{\alpha_1}$ 之半径最大），使得 $\bigcap_{i=1}^{k}B_{\alpha_i}\supset F$. 令 $\widetilde{B}_1=B_{\alpha_1}$，再在 $B_{\alpha_2},B_{\alpha_3},\cdots,B_{\alpha_k}$ 中与 $\widetilde{B}_1$ 不相交的半径最大者记为 $\widetilde{B}_2$，依次继续做下去，最后再令 $B_i^*=3\widetilde{B}_i$，我们有

$$\lambda<m(F)\leqslant\sum_{i\geqslant1}m(B_i^*)=3^n\sum_{i\geqslant1}m(\widetilde{B}_i).$$

即得所证.

(2) 设 x 是属于 $\mathbf{R}^n$ 的格点，对每个 $k\in\mathbf{N}$，令 $r_k=\sqrt{n}/k^{1+1/n}$，且选一切满足 $B(x/k,r_k)\subset G$ 的球 B，其全体记为 Γ，由 G 的有界性可知，Γ 的数量是 $O(k^n)$. 从而存在常数 C，使得上述球列满足 $\sum_{i\geqslant1}(m(B_i))^p\leqslant C\sum_{k\geqslant1}k^nr_k^{np}$（可选取 r_k 使级数收敛）.

现在设 $y\in G$，对充分大的 k，有 $B(y,2r_k)\subset G$. 因为有无穷多个 k，可以取到格点 x_k，使得 $y\in B(x_k/k,r_k)$. 所以同时成立 $B(y,2r_k)\subset G$，$y\in B(x_k/k,r_k)$. 而由三角不等式易推 $B(x_k/k,r_k)\subset G$，y 属于无穷多个 B_i，即 $G=\overline{\lim_{i\to\infty}}B_i$.

(3) 不妨假定 $m(G)<+\infty$. 已知 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n^{(0)}$，$\{I_n^{(0)}\}$ 是互不相交的半开闭正方形列. 现在对每个 $I_n^{(0)}$，作一个同心内接开圆 $B_n^{(0)}$，且令 $\alpha_2=m(B(0,1))$，则不难得到 $m(B_n^{(0)})/m(I_n^{(0)})=\alpha_2/2^2$. 因此我们有

$$\begin{aligned}m\left(G\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^{(0)}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}m(I_n^{(0)}\setminus B_n^{(0)})\\&=(1-\alpha_2/2^2)m(G)=q\cdot m(G),\quad q=1-\alpha_2/2^2<1.\end{aligned}$$

令 $G_1=G\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{B_n^{(0)}}$，则 G_1 是开集，同上将 G_1 写为 $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n^{(1)}$，并在每个 $I_n^{(1)}$ 中作一个同心内接开圆 $B_n^{(1)}$，我们又有

$$m\left(G_1\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^{(1)}\right)=qm(G_1)=q^2m(G).$$

依次继续做下去，根据归纳法，最后可得圆列$\{B_n^{(k)}\}$，使得

$$m\left(G\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^{(k)}\right)=0.\quad 证毕.$$

例 4 试证明下列命题：

(1) 设$E\subset\mathbf{R}^n$. (i) 若对任给$\varepsilon>0$，存在开集G：$G\supset E$且$m^*(G\setminus E)<\varepsilon$，则$E$是可测集. (ii) 若对任给$\varepsilon>0$，存在闭集$F$：$F\subset E$且$m(E\setminus F)<\varepsilon$，则$E$是可测集.

(2) 设$E\subset\mathbf{R}^n$且$m^*(E)<+\infty$，若有

$$m^*(E)=\sup\{m(F):F\subset E\text{ 是有界闭集}\},$$

则E是可测集.

(3) 设$E_1,E_2\subset\mathbf{R}^n$，$E_1\cup E_2$是可测集且$m(E_1\cup E_2)<+\infty$. 若有$m(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$，则$E_1$与$E_2$皆可测.

(4) 设$E\subset\mathbf{R}^1$是有界点集. 则E可测的充分必要条件是：对任给$\varepsilon>0$，存在有限个互不相交的区间之并：$V=\bigcup_{i=1}^{N}I_i$，使得$m^*(E\triangle V)<\varepsilon$.

(5) 设$E\subset\mathbf{R}^n$，则E可测的充分必要条件是：对任给$\varepsilon>0$，存在开集G_1,G_2：$G_1\supset E$，$G_2\supset E^c$，使得$m(G_1\cap G_2)<\varepsilon$.

证明 (1) 依题设知，对$n\in\mathbf{N}$，存在G_n：$G_n\supset E$，$m^*(G_n\setminus E)<1/n$. 令$H=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，则$H\supset E$且$m^*(H\setminus E)\leqslant m^*(G_n\setminus E)<1/n$. 从而知$m^*(H\setminus E)=0$，而$E=H\setminus(H\setminus E)$，故$E$可测.

(2) 对任给$\varepsilon>0$，取开集G：$G\supset E$，且$m(G)<m^*(E)+\varepsilon/2$. 此外，又选闭集$F$：$F\subset E$且$m(F)>m^*(E)-\varepsilon/2$. 从而知存在$F\subset E\subset G$，且$m(G\setminus F)<\varepsilon$，即$E$是可测集.

(3) 作E_1,E_2的等测包H_1,H_2，我们有

$$m(H_1)+m(H_2)\geqslant m(H_1\cup H_2)\geqslant m(E_1\cup E_2)$$
$$=m^*(E_1)+m^*(E_2)=m(H_1)+m(H_2).$$

从而可知$m(H_1\cap H_2)=0$，且有$m^*(H_1\setminus E_1)=0$. 注意到$H_1=E_1\cup(H_1\setminus E_1)$，即得$E_1\in\mathscr{M}$. 同理有$E_2\in\mathscr{M}$.

(4) 充分性 取有界区间J：$E\subset J$，$V\subset J$，易知

$$(J\setminus E)\triangle(J\setminus V)=E\triangle V,$$

$$|m^*(J\setminus E)-m^*(J\setminus V)|\leqslant m^*(E\triangle V)<\varepsilon.$$

再注意到 $|m^*(E)-m^*(V)|\leqslant m^*(E\triangle V)<\varepsilon$，以及

$$m(V)+m(J\setminus V)=m(J),$$

$$|m^*(E)+m^*(J\setminus E)-m^*(J)|<2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，我们有 $m^*(E)+m^*(J\setminus E)=m(J)$. 由(3)即得所证.

必要性 假定 E 是可测集，则对任给 $\varepsilon>0$，可作开集 G: $G=\bigcup_{i\geqslant 1}I_i\supset E$（$\{I_i\}$ 是 G 的构成区间）且有 $m(G\setminus E)<\varepsilon$. 从而又有 $m\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}I_i\setminus E\right)<\varepsilon$ $(n_0\in\mathbf{N})$. 此外，由 $\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n_0}I_i\right)\subset\bigcup_{n_0+1}^{\infty}I_i$ 可知 $m\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n_0}I_i\right)\leqslant m\left(\bigcup_{n_0+1}^{\infty}I_i\right)$. 因为存在 n_1: $n_1>n_0$，使得 $m\left(\bigcup_{n_1+1}^{\infty}I_i\right)<\varepsilon$，所以我们有

$$m\left(E\triangle\bigcup_{i=1}^{n_1}I_i\right)\leqslant m\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n_1}I_i\right)+m\left(\bigcup_{i=1}^{n_1}I_i\setminus E\right)<2\varepsilon.$$

(5) **必要性** 设 E 是可测集，则对任给 $\varepsilon>0$，存在包含 E 的开集 G_1 以及含于 E 的闭集 F，使得

$$m(G_1\setminus E)<\varepsilon/2,\quad m(E\setminus F)<\varepsilon/2,$$

$$m(G_1\setminus F)\leqslant m(G_1\setminus E)+m(E\setminus F)<\varepsilon.$$

令 $G_2=F^c$，易知 G_2 是开集且有 $G_2\supset E^c$，我们有 $m(G_1\cap G_2)<\varepsilon$.

充分性 假定存在 $G_1\supset E$，$G_2\supset E^c$，使得 $m(G_1\cap G_2)<\varepsilon$，则令 $F=G_2^c$，易知 $F\subset E$，且有 $m(G_1\setminus F)<\varepsilon$. 从而可知 $m^*(G_1\setminus E)<\varepsilon$，即 E 是可测集.

例 5 (Steinhaus) 设 $A,B\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集，且有 $m(A)<+\infty$，$m(B)<+\infty$，试证明 $f(x)=m(A\cap(B+\{x\}))$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上连续.

证明 (i) A,B 是区间的情形：不妨设 $A=(a,b)$，$B=(c,d)$，且 $a\leqslant c<d\leqslant b$，我们有

$$A\cap(B+x)=\begin{cases}\varnothing, & x\leqslant a-d,\\ (a,d+x), & a-d\leqslant x\leqslant a-c,\\ (c+x,d+x), & a-c\leqslant x\leqslant b-d,\\ (c+x,b), & b-c\leqslant x.\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 连续. 易知 A,B 是一般区间时，$f(x)$ 也连续.

(ii) A,B 是开集的情形：不妨设 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, B=\bigcup_{m=1}^{\infty}J_m$（$I_n,J_m$ 是开区间），且满足 $I_j\cap I_k=\varnothing, J_j\cap J_k=\varnothing(j\neq k)$，以及 $m(I_n)<+\infty, m(J_n)<+\infty$，则有

$$A\cap(B+\{x\})=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)\cap\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(J_m+\{x\})\right)$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(I_n\cap(J_m+\{x\})).$$

从而知

$$m(A+(B+\{x\}))=\sum_{n,m=1}^{\infty}m(I_n\cap(J_m+\{x\})).$$

$\Big($注意，$m(I_n\cap(J_m+\{x\}))\leqslant|I_n|, \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=m(A)<+\infty$，故上式右端级数一致收敛.$\Big)$ 因为 $m(I_n\cap(J_m+\{x\}))$ 是 x 的连续函数，所以 $m(A\cap(B+\{x\}))$ 是 x 的连续函数.

(iii) A,B 是任意可测集的情形：取开集 G_A,G_B：$G_A\supset A, G_B\supset B$，且 $m(G_A\setminus A)<\varepsilon/2, m(G_B\setminus B)<\varepsilon/2$，我们有

$$G_A\cap(G_B+\{x\})\subset(\{x\}+(G_B\setminus B))\cup(G_A\setminus A)\cup((\{x\}+B)\cap A),$$
$$(\{x\}+B)\cap A\subset((\{x\}+G_B)\cap G_A)\cup(G_B\setminus B)\cup(G_A\setminus A).$$

从而可得

$$|m(G_A\cap(\{x\}+G_B)-m((\{x\}+B)\cap A)|$$
$$\leqslant m(G_B\setminus B)+m(G_A\setminus A)<\varepsilon.$$

因为 $m(G_A\cap(G_B+\{x\}))$ 是 x 的连续函数，所以存在 $\delta>0$，

$$|m(G_A\cap(G_B+\{x\}))-m(G_A\cap(G_B+\{y\}))|<\varepsilon,$$
$$|x-y|<\delta.$$

由此知对满足 $|x-y|<\delta$ 之 y，就有

$$|m(A\cap(B+\{x\}))-m(A\cap(B+\{y\}))|$$
$$\leqslant|m(G_A\cap(G_B+\{x\}))-m(A\cap(B+\{x\}))|$$
$$+|m(G_A\cap(G_B+\{x\}))-m(G_A\cap(G_B+\{y\}))|$$
$$+|m(G_A\cap(G_B+\{y\}))-m(A\cap(B+\{y\}))|\leqslant 3\varepsilon.$$

即得所证.

例 6 解答下列问题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$H\supset E$ 且 H 是可测集. 若 $H\setminus E$ 中任一可测子集皆为零测集，试问 H 是 E 的等测包吗？

(2) 设 $m^*(E)<\infty$，试证明存在 G_δ 型集 H：$H\supset E$，使得对于任一可测集 A，都有 $m^*(E\cap A)=m(H\cap A)$.

(3) 设 $\{E_k\}\subset\mathbf{R}^n$ 是递减可测集列，$S\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m^*(S)<+\infty$，试证明 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k\cap S)=m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k\cap S)$.

解 (1) 作 E 的等测包 G，因为 $H\setminus G\subset H\setminus E$ 且 $H\setminus G$ 是可测集，所以 $m(H\setminus G)=0$. 由此知 $m^*(E)=m(H)$，即 H 是 E 的等测包.

(2) 作 E 的 G_δ 型的等测包 H，且对任一集 $A\in\mathscr{M}$，设 B 是 $(H\cap A)\setminus(E\cap A)$ 中的任一可测集，则由

$$(H\cap A)\setminus(E\cap A)\subset H\setminus E$$

可知，$m(B)=0$. 从而根据(1)即得 $m(H\cap A)=m^*(E\cap A)$.

(3) 根据 $E_k(k\in\mathbf{N})$ 的可测性，可知

$$m^*(S)=m^*(S\cap E_k)+m^*(S\cap E_k^c)\quad(k\in\mathbf{N}).$$

令 $k\to\infty$，并注意到 $\{S\cap E_k^c\}$ 是递增集合列，又得

$$m^*(S)=\lim_{k\to\infty}m^*(S\cap E_k)+m^*(S\cap(\lim_{k\to\infty}E_k)^c).$$

但因 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k$ 是可测集，所以应成立等式

$$m^*(S)=m^*(S\cap\lim_{k\to\infty}E_k)+m^*(S\cap(\lim_{k\to\infty}E_k)^c).$$

从而我们有(注意 $m^*(S)<+\infty$)

$$\lim_{k\to\infty}m^*(E_k\cap S)=m^*(\lim_{k\to\infty}E_k\cap S).$$

例 7 试证明下列命题：

(1) 设 $E_1,E_2\subset\mathbf{R}^n$，则 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$ 的充分必要条件是：存在可测集 M_1,M_2：$M_1\supset E_1,M_2\supset E_2$，且 $m(M_1\cap M_2)=0$.

(2) 设 μ^* 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的一种外测度，若任一 Borel 集都是 μ^* 可测集，则 μ^* 是距离外测度.

证明 (1) 充分性 不妨假定 $m^*(E_1\cup E_2)<+\infty$. 对任给 $\varepsilon>0$，作开集 G，使得

$$G\supset E_1\cup E_2,\quad m(G)<m^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon.$$

因为 $E_1\subset M_1\cap G,E_2\subset M_2\cap G$，且 $m[(M_1\cap G)\cap(M_2\cap G)]=0$，所以得到

$$\begin{aligned}m^*(E_1)+m^*(E_2)&\leqslant m(M_1\cap G)+m(M_2\cap G)\\&=m((M_1\cap G)\cup(M_2\cap G))\end{aligned}$$

$$\leqslant m(G) \leqslant m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知，$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$.

必要性 作 E_1, E_2 的等测包 M_1, M_2：$m(M_1) = m^*(E_1)$，$m(M_2) = m^*(E_2)$. 如果 $m(M_1 \cap M_2) > 0$，那么就有

$$\begin{aligned} m^*(E_1 \cup E_2) &= m^*(E_1) + m^*(E_2) = m(M_1) + m(M_2) \\ &= m(M_1 \cup M_2) + m(M_1 \cap M_2) > m(M_1 \cup M_2) \\ &\geqslant m^*(E_1 \cup E_2). \end{aligned}$$

这导致矛盾，故 $m(M_1 \cap M_2) = 0$.

(2) 依题设知，开集是 μ^* 可测的. 现在设 E_1, E_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个点集，且 $d(E_1, E_2) > 0$，则可作开集 G：$G \supset E_1$ 且 $G \cap E_2 = \varnothing$. 从而得到

$$\begin{aligned} \mu^*(E_1 \cup E_2) &= \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap G) + \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap G^c) \\ &= \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2). \end{aligned}$$

即得所证.

例 8 解答下列问题：

(1) 试证明 $[0,1]$ 中存在非空完全集 C_p，使得 $G = [0,1] \setminus C_p$ 是开集，且 $m(G) = 1/(p-2) = \delta > 0$（或 $p = (1+2\delta)/\delta$），其中 C_p 无内点.（也称 C_p 为类 Cantor 集或 Harnack 集）

(2) 设 $0 < \delta \leqslant 1$ 以及区间 $[a,b]$，试证明存在 $[a,b]$ 中稠密开集 G，使得 $m(G) = \delta(b-a)$.

(3) 试将 $[0,1]$ 表成两个互不相交的可测集 A, B 之并集，使得对 $[0,1]$ 中任一区间 I，均有

$$m(A \cap I) > 0, \quad m(B \cap I) > 0.$$

解 (1) 取 $p = (1+2\delta)/\delta$，并采用类似于 Cantor 集的构造过程：第一步，我们在 $[0,1]$ 中移去长度为 $1/p$ 的同心开区间；第二步，在留存的两个闭区间的每一个中，又移去长度为 $1/p^2$ 的同心开区间；第三步，在留存的四个闭区间中再移去长度为 $1/p^3$ 的同心区间；…. 继续此过程，可得一列移去的开区间，记其并集为 G（开集），则 G 的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{p} \right)^n = \frac{1}{p-2} = \delta.$$

我们称 $C_p = [0,1] \setminus G$ 为**类 Cantor 集**（当 $p = 3$ 时，C_p 就是 Cantor（三分）集）. C_p 也是非空完全集，且没有内点.

(2) 类似于 Harnack 集的作法，只是以$[a,b]$代替$[0,1]$，$p=(1+2\delta)/\delta\geqslant 3$. 第一步挖去以$(a+b)/2$为中心，长为$(b-a)/p$的开区间$I_1^{(1)}$，第二步再在剩下的两个闭区间中，各挖去同心且长为$(b-a)/p^2$的开区间$I_1^{(2)}$，$I_2^{(2)}$. …. 继续类似地做下去，得到$[a,b]$中一个开集$G$(被挖去者)：$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2^n-1}I_i^{(n)}$，且有

$$m(G)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^n-1}|I_i^{(n)}|=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}(b-a)/p^n=\delta\cdot(b-a).$$

(3) 类似于 Harnack 集的作法：

(i) 在$[0,1]$中作出无内点的对称于区间中心的完备集H_1，且$m(H_1)=1/4$.

(ii) 在$[0,1]$中H_1的每个剩余的邻接区间内，均作出如(i)中之完备集，可得$H_2=\bigcup_{i=1}^{\infty}H_i^{(2)}$，且$m(H_2)=1/8$. 依次类推，…，可得$A\triangleq\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k$，$m(A)=1/2$.

现在，令$B=[0,1]\setminus A$，并设I是$[0,1]$中任一区间，又取n_0，使得$n_0>2^2/|I|$. 易知$\bigcup_{k=1}^{n_0}H_k$的邻接区间长度小于$1/n_0$，故存在一个区间J：$J\cap H_k=\varnothing\,(k=1,2,\cdots,n_0)$，

$$m(J\cap H_{n+1})=|J|/2^{n+2},$$

$$m(J\cap H_{n+i})\leqslant|J|/2^{n+i}\quad(i=2,3,\cdots).$$

由$I\cap A\supset J\cap H_{n+1}$，故$m(I\cap A)\geqslant m(J\cap H_{n+1})>0$. 此外，因为$J\cap A=\bigcup_{k=1}^{\infty}(J\cap H_k)$，$m(J\cap A)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(J\cap H_k)<|J|$，所以$m(J\cap B)>0$. 易知$m(I\cap B)>0$.

例 9 解答下列问题：

(1) 试作$[0,1]$上的函数$f(x)$，使其不连续点集D满足：(i) $m(D)=0$. (ii) 对任意的$(\alpha,\beta)\subset[0,1]$，点集$D\cap(\alpha,\beta)$不可数.

(2) 试作$E\subset[0,1]$，$m(E)=0$，使得对任意的$f\in R([0,1])$ (Riemann 可积)，E中均有$f(x)$的连续点.

(3) 设 $0<\varepsilon_n<1(n\in\mathbf{N})$，则 $\varepsilon_n\to0(n\to\infty)$ 的充分必要条件是：存在 $E_n\subset[0,1]$ 且 $m(E_n)=\varepsilon_n(n\in\mathbf{N})$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)<+\infty, x\in[0,1]\setminus Z, m(Z)=0$.

(4) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是无内点的闭集，且 $m(F)>0$. 若有 $Z\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m(Z)=0$，则 $\chi_F\overline{\in}C(Z^c)$.（但对任给 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\subset\mathbf{R}^n, m(G)<\varepsilon$，使得 $\chi_F\in C(G^c)$）.

解 (1) (i) 记 $[0,1]$ 中的 Cantor 集为 C_1.

(ii) 在 $[0,1]\setminus C_1$ 中的每个剩余邻接区间中，再类似于作 Cantor 集的三分手法，作出完全集，其全体记为 C_2，…，依此法继续作下去，可得 $\{C_n\}$. 现在令 $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$，且作函数如下：

$$f(x)=\begin{cases}1/2^n, & x\in C_n\ (n\in\mathbf{N}),\\ 0, & x\overline{\in}C.\end{cases}$$

即得所求.

(2) 记 $[0,1]\cap\mathbf{Q}=\{r_n\}$，且对每个 k，我们作 $(0,1)$ 中开区间列 $\{I_k^{(n)}\}$：$r_n\in I_k^{(n)}$ 且 $|I_k^{(n)}|\leqslant2^{-(k+n)}$. 令 $G_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_k^{(n)}$（开集），$G_k\supset\mathbf{Q}\cap[0,1]$ 且 $m(G_k)\leqslant2^{-k}$. 再令 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$（$G_\delta$ 集）$\subset[0,1]$，易知 $m(E)=0$.

因为稠密的 G_δ 集的补集是第一纲集，所以 E 是第二纲集. 从而 E 必与每个稠密 G_δ 集有非空交集. 另一方面，$f(x)$ 是 Riemann 可积的，其连续点集是 G_δ 型集，必稠密，证毕.

(3) **必要性** 令 $E_n=[0,\varepsilon_n](n\in\mathbf{N})$，则 $m(E_n)=\varepsilon_n(n\in\mathbf{N})$. 易知 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)<+\infty$, a.e. $x\in[0,1]$.

充分性 由 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)<+\infty$, a.e. $x\in[0,1]$ 可知，使 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)=+\infty$ 的点集是 $[0,1]$ 中点属于 $\{E_n\}$ 中无穷多个的 x 全体，即上限集 $\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n$ 也是零测集. 由此可得 $\lim_{n\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)=0$. 故 $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=\lim_{n\to\infty}m(E_n)=0$.

(4) 依题设知 $Z^c\cap F\neq\varnothing$. 假定对 $x_0\in Z^c\cap F$，$\chi_F(x)$在 $x=x_0$ 处关于 Z^c 是连续的，则存在 $\delta_0>0$，使得

$$\chi_F(x)=1\quad (x\in B(x_0,\delta_0)\cap Z^c).$$

这说明 $B(x_0,\delta_0)\cap Z^c\subset F$，但 $m(Z)=0$，故 $B(x_0,\delta_0)\cap Z^c$ 在 $B(x_0,\delta_0)$ 中稠密. 矛盾.

§ 2.4　正测度集与矩体的关系

基本内容

定理 1　设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集且 $m(E)>0$，$0<\lambda<1$，则存在矩体 I，使得 $\lambda|I|<m(I\cap E)$.

定理 2(Steinhaus，1920 年)　设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集且 $m(E)>0$. 作(向量差)点集

$$E-E\triangleq\{x-y:\ x,y\in E\},$$

则存在 $\delta_0>0$，使得 $E-E\supset B(0,\delta_0)$.

典型例题精解

例 1　试证明下列命题：

(1) $[0,1]$中存在正测集 E，使得对于$[0,1]$中任一开区间 I，有 $0<m(E\cap I)<m(I)$.

(2) 设 $\Gamma=\{E_\alpha\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中某些互不相交的正测集形成的集族，则 Γ 是可数的.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(E)>0$，则存在 $x_1,x_2\in E$，使得$|x_1-x_2|$是有理数.

(4) 设 $E\subset[0,1]$是可测集且有

$$m(E)\geqslant\varepsilon>0,\quad x_i\in[0,1],\ i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $n>2/\varepsilon$. 则 E 中存在两个点其距离等于$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$中某两个点之间的距离.

证明　(1) 首先在$[0,1]$中作类 Cantor 集 H_1：$m(H_1)=1/2$. 其次在$[0,1]$中 H_1 的邻接区间$\{I_{1j}\}$的每个 I_{1j}内再作类 Cantor 集 H_{1j}：$m(H_{1j})=|I_{1j}|/2^2$，并记 $H_2=\bigcup_{j=1}^{\infty}H_{1j}$. 然后，对 $H_1\cup H_2$ 的邻接区间

$\{I_{2j}\}$的每个 I_{2j}，又作类 Cantor 集 H_{2j}: $m(H_{2j})=|I_{2j}|/2^3$. 再记 $H_3=\bigcup_{j=1}^{\infty}H_{2j}$，…，依次继续进行，则可得$\{H_m\}$. 令 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n$，即可得证.

(2) 令 $I_n=[-n,n](n=0,1,2,\cdots)$，$E_\alpha^{(n)}=(I_{n+1}\setminus I_n)\cap E_\alpha(n=0,1,2,\cdots)$，对每个 n，在 Γ 中使得 $m(E_\alpha^{(n)})>0$ 的 $E_\alpha^{(n)}$ 只能有可数个. 从而 Γ 是可数的.

(3) 注意，存在 $\delta>0$，$E-E\supset(-\delta,\delta)$.

(4) 作 $E_i=E+\{x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$，则由测度的平移不变性可知，$m(E_i)=m(E)(i=1,2,\cdots,n)$. 又因为有 $E_i\subset[0,2](i=1,2,\cdots,n)$，所以如果$\{E_i\}$之间互不相交，就有

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=n\cdot m(E)\leqslant 2,\quad n\leqslant 2/m(E)\leqslant 2/\varepsilon.$$

这与题设矛盾，故存在 i_0,i_1: $i_0\neq i_1$ 且 $1\leqslant i_0,i_1\leqslant n$，使得 $E_{i_0}\cap E_{i_1}\neq\varnothing$. 即存在 $s,t\in E$，使得 $s+x_{i_0}=t+x_{i_1}$. 从而有 $|s-t|=|x_{i_0}-x_{i_1}|$，证毕.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $A,B\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(A)>0,m(B)>0$，又 $D\subset\mathbf{R}^1$ 在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密，则存在 $a\in A,b\in B$，使得 $b-a\in D$.

(2) 设 $A,B\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(A)>0,m(B)>0$，作点集 $E=\{|a-b|: a\in A,b\in B\}$，则 E 包含一个区间.

(3) 设 $A,B\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(A)>0,m(B)>0$，则 $A+B$ 包含一个区间.

(4) 存在 $A,B\subset\mathbf{R}^1$: $m(A)=m(B)=0$，且 $m(A+B)>0$.

证明 (1) 由题设知存在区间 I_A,I_B，使得

$$m(A\cap I_A)>3|I_A|/4,\quad |I_B|<|I_A|/2,\quad m(I_B\cap B)>3|I_B|/4.$$

把区间 I_A 等分，则存在子区间 $\tilde{I}$，使得 $m(\tilde{I}\cap A)>3|I_B|/4$. 由于 D 是稠密集，可取 $d\in D$，使得$(I_B\cap B)+\{d\}\subset\tilde{I}$. 我们有

$$m(\tilde{I}\cap A)>3|I_B|/4,$$

$$m((I_B\cap B)+\{d\})=m(I_B\cap B)>3|I_B|/4.$$

从而得 $m(\tilde{I}\cap((A\cap B)+\{d\}))>0$，即存在 $a\in A,b\in B$，使得 $b-a\in D$.

(2) 令 $E^c=D$，若 D 在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密，则由(1)可知，存在 $a\in A,b\in B$，使得 $b-a\in D$. 这与 D 的定义矛盾，即 D 非稠密集. 因此 E 就包含一个

区间了.

(3) 易知$m(-B)=m(B)>0$,而$A+B=A-(-B)$就包含一个区间了.

(4) 取$A=B=C$(Cantor 集),则$A+B=[0,2]$.

例 3 试证明下列命题:

(1) 设$E\subset\mathbf{R}^1$且$m(E)>0$,则存在$a>0$,使得

$$(E+\{x\})\cap E\neq\varnothing\quad(|x|<a).$$

(2) 设$E\subset\mathbf{R}^2$,且$m(E)>0$,则存在$x_0\in E$,使得对任一圆$B(x_0,\delta)\triangleq B$,均有$m(B\cap E)>0$.

(3) 设$E\subset[0,1]$是可测集. 若存在δ_0: $1>\delta_0>0$,对任一区间$(a,b)\subset[0,1]$,均有$m(E\cap(a,b))\geqslant\delta_0(b-a)$,则$m(E)=1$.

(4) 设$I\subset\mathbf{R}^1$是开区间,$E\subset\mathbf{R}^1$是可测集. 若存在$\lambda>0$,使得$m(E\cap I)>\lambda|I|$,则对$n\in\mathbf{N}$,存在开区间$J\subset I$:

$$|I|=n\cdot|J|,\quad m(E\cap J)>\lambda|J|.$$

证明 (1) 因为存在$a>0$,使得$E-E\supset(-a,a)$. 所以当$|x|<a$时,有$x_1,x_2\in E$,使得$x=x_1-x_2$. 即$x+x_2\in E$,也就是说

$$(E+\{x\})\cap E\neq\varnothing\quad(|x|<a).$$

(2) 反证法. 应用 Linderöf 定理(可数覆盖).

(3) 作点集$[0,1]\setminus E=M$,则

$$m(E\cap(a,b))+m(M\cap(a,b))=b-a.$$

注意到$m(E\cap(a,b))\geqslant\delta_0(b-a)$,故有

$$m(M\cap(a,b))\leqslant(1-\delta_0)(b-a).$$

令$\lambda=1-\delta_0$,注意到$0<\lambda<1$,这也就是说,对任意(a,b),均有$m(M\cap(a,b))\leqslant\lambda(b-a)$. 但这只能是$m(M)=0$,即$m(E)=1$.

(4) 将I等分成n个互不相重的区间: $I_1,I_2,\cdots,I_n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot|I_i|=\lambda|I|<m(E\cap I)=\sum_{i=1}^{n}m(E\cap I_i).$$

由此可知,存在i_0,使得$m(E\cap I_{i_0})>\lambda\cdot|I_{i_0}|$. 从而取$J$为$I_{i_0}$即可.

例 4 试证明下列命题:

(1) (i) 设$E\subset\mathbf{R}^2$且$m(E)>1$,则E中存在两点: $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$,其中$x_2-x_1\in\mathbf{Z}$, $y_2-y_1\in\mathbf{Z}$($\mathbf{Z}$是整数集).

(ii) 设 $S\subset\mathbf{R}^2$ 是以原点$(0,0)$为中心的对称凸集，且 $m(S)>2^2$，则 S 包含整数格点 $P=(x,y)\neq(0,0)$. 此外，又若存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使得 $m(S)>n_0\cdot 2^2$，则 S 至少包含 $2n_0$ 个整数格点.

(2) 设 $A\subset[0,1]$且 $m(A)>1/2$，则 A 包含一个子集 A_0: $m(A_0)>0$，且 A_0 关于点 $x=1/2$ 是对称的.

(3) 设有定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的函数 $f(x)$，满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x,y\in\mathbf{R}^1,$$

且在 $E\subset\mathbf{R}^1(m(E)>0)$上有界，则 $f(x)=cx\ (x\in\mathbf{R}^1)$，其中 $c=f(1)$.

证明 (1) (i) 将 $\mathbf{R}^2$ 分解为可列个以整数格点为顶点的正方形. 记 $L=(i,j)(i,j\in\mathbf{Z})$，作点集

$$I_L=\{L+P:\ P=(x,y)\in[0,1)\times[0,1)\},$$

$$E_L=\{\{x\}-L:\ x\in E\cap I_L\},$$

由 $\sum\limits_L m(E_L)=\sum\limits_L m(E\cap I_L)=m(E)>1$，可知集合族$\{E_L\}$不能全部互不相交. 从而存在 $L_1,L_2\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，使得 $E_{L_1}\cap E_{L_2}\neq\varnothing$. 令 $\lambda\in E_{L_1}\cap E_{L_2}$，则

$$\lambda=P_1-L_1=P_1-L_2\quad(P_1,P_2\in E).$$

因此，$0\neq P_1-P_2=L_1-L_2\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

(ii) 考查点集 $E=\{x/2,x\in S\}$. 此外，用类似于(i)的推理，易知存在至少属于$\{E_L\}$中 n_0+1 个集合的点. 从而 E 含有不同点 $L_1,L_2,\cdots,L_{n_0+1}$，使得 $L_k-L_j\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. 注意指标 i，使得 L_i 不属于其余点组成的凸包，易推出$\pm(L_k-L_i)(k\neq i)$是相异点组，证毕.

(2) 考查$-A$，并令$-A+\{1\}=B$，则 $m(B)=m(A)$. 又记 $E=A\cap B$，由 $B\subset[0,1]$可知，$E\neq\varnothing$. 易知$m(E)>0$(否则由 $m(A)+m(B)>1$ 可知，$m(A\cup B)=m(A)+m(B)>1$，矛盾).

现在，若有 $x\in E\cap[0,1/2]$，则$-x\in[-1/2,0]$. 从而得$-x+1\in[1/2,1]$. 又，$x\in B$，则 $x=-y+1(y\in A)$. 我们有

$$-x+1=y\in[1/2,1],\quad x+y=1.$$

即对称成立.

(3) (i) 首先，由题设知，对 $r\in\mathbf{Q}$，必有 $f(r)=rf(1)$.

(ii) 其次，由 $m(E)>0$ 可知，存在区间 I: $I\subset E-E$. 不妨设

$|f(x)|\leqslant M\ (x\in E)$,又对任意的 $x\in I$,有 $x',x''\in E$,使得$x=x'-x''$,则

$$|f(x)| = |f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x')| + |f(x'')| \leqslant 2M.$$

记 $I=[a,b]$,并考察$[0,b-a]$. 若 $x\in[0,b-a]$,则 $x+a\in[a,b]$. 从而由 $f(x)=f(x+a)-f(a)$可知,$|f(x)|\leqslant 4M(x\in[0,b-a])$. 记 $b-a=c$,这说明

$$|f(x)| \leqslant 4M, \quad x \in [0,c].$$

易知$|f(x)|\leqslant 4M$, $x\in[-c,c]$.

已知对任意的 $x\in\mathbf{R}^1$ 以及自然数 n,均存在有理数 r,使得$|x-r|<c/n$. 因此我们得到

$$\begin{aligned}|f(x) - xf(1)| &= |f(x - r) + rf(1) - xf(1)| \\ &= |f(x - r) + (r - x)f(1)| \leqslant \frac{4M + c|f(1)|}{n}.\end{aligned}$$

根据 n 的任意性(x 的任意性),即得 $f(x)=xf(1)$.

§2.5 不可测集

基本内容

定理 $\mathbf{R}^n$ 中存在不可测集 W.

典型例题精解

例 1 解答下列问题:

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(E)>0$,试证明存在 E 中不可测集 W.

(2) 试问是否存在 $E\subset[0,1]$,使得对于任意的 $x\in\mathbf{R}^1$,存在$y\in E$,有 $x-y\in\mathbf{Q}$?

(3) 试在$[0,1]$中作一不可数集 W,使得 $W-W$ 无内点.

(4) 设有 f: $[a,b]\to\mathbf{R}^1$,若对于$[a,b]$中任一可测集 E,$f(E)$必为 $\mathbf{R}^1$ 中的可测集,试证明:对于$[a,b]$中任一零测集 Z,必有$m(f(Z))=0$.

解 (1) 由 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E\cap[-n,n])$可知,存在 n_0,使得

$$m(E_0) > 0 \quad (E_0 = E \cap [- n_0,n_0]).$$

对 $x\in E_0$，作 $E_x=\{t\in E_0: t-x\in \mathbf{Q}\}$，易知 $E_0=\bigcup\limits_{x\in E_0} E_x$.

设 $x_1,x_2\in E_0$. 若 $x_1-x_2\in\mathbf{Q}$，则 $E_{x_1}=E_{x_2}$. 否则有 $E_{x_1}\cap E_{x_2}=\varnothing$. 从而知存在由不同的 E_x 中都取一个点组成点集 W: $W\subset E_0$. 现在记 $\{r_n\}=\mathbf{Q}\cap[-2n_0,2n_0]$，则得

$$(W+\{r_k\})\cap(W+\{r_j\})=\varnothing\ (r_k\neq r_j),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(W+\{r_n\})\subset[-3n_0,3n_0],\quad E_0\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(W+\{r_n\}).$$

假定 W 是可测集，那么每个 $W+\{r_n\}$ 是可测集，我们有

$$0<m(E_0)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(W+\{r_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}m(W)\leqslant 6n_0. \qquad (*)$$

在上式中：若 $m(W)=0$，则 $m(E_0)=0$，这导致矛盾；若 $m(W)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(W)=+\infty>6n_0$，也与(*)矛盾. 这说明 W 是不可测集.

(2) 存在. 只需取[0,1]中 E 为不可测集即可.

(3) 将[0,1]中的一切点分解成许多等价类：当 $x,y\in[0,1]$ 且 $x-y\in\mathbf{Q}$ 时，x 与 y 属于同一类，然后在每一类中取一个点形成点集 W. 自然，W 是不可数集.

(i) 对 $x\in W$，$x-x=0\in W$，$0\overline{\in}\mathbf{Q}\setminus\{0\}$.

(ii) 对 $x\in W$，$y\in W$ 且 $x\neq y$，则 $x-y\overline{\in}\mathbf{Q}$. 从而

$$x-y\in(\mathbf{Q}\setminus\{0\})^c.$$

综合(i)，(ii)结果，我们有 $W-W\subset(\mathbf{Q}\setminus\{0\})^c$，故 $W-W$ 不含有内点.

(4) 反证法. 假定 $m(f(Z))>0$，则 $f(Z)$ 内包含有不可测集 W. 但 $f^{-1}(W)\subset Z$ 且 $m(f^{-1}(W))=0$，故由题设知 $f(f^{-1}(W))=W$ 是可测集，矛盾.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集，而 $B\subset A$ 是不可测集，则 $m^*(A\setminus B)>0$.

(2) 设有点集 E. 若对任意的满足 $F\subset E\subset G$ 的闭集 F 和开集 G，有

$$\sup_F\{m(F)\}<\inf_G\{m(G)\},$$

则 E 不可测.

(3) 设 $W\subset[0,1]$是如例 1 之(3)中所作的不可测集,则 W 内的任一 Borel 集 A 满足 $m(A)=0$.

证明 (1) 注意 $B=A\setminus(A\setminus B)$.

(2) 反证法. 不妨设 $m(E)<+\infty$,假定 E 可测,则取 $\varepsilon_0=\inf\limits_G\{m(G)\}-\sup\limits_F\{m(F)\}$,可作开集 G,闭集 F 使得$G\supset E$,$F\subset E$,且 $m(G\setminus E)<\varepsilon/2$,$m(E\setminus F)<\varepsilon/2$. 从而可得

$$m(G)-m(F)=m(G)-m(E)+m(E)-m(F)<\varepsilon_0.$$

这与题设矛盾,得证.

(3) 作 $A_r=A+\{r\}$,则 $m(A)=m(A_r)$. 且当有理数 r,s 满足 $0\leqslant r<s<1$时,$A_r\cap A_s=\varnothing$,还存在区间 I: $I\supset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,其中 $A_n=A+\{r_n\}$,$\{r_n\}$是$[0,1)$中有理数全体. 现在假定$m(A)>0$,则由

$$|I|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=+\infty$$

导致矛盾,即得所证.

例 3 解答下列问题:

(1) 试问一族可测集的交集必是可测集吗?

(2) 设 Γ 是一族半开闭区间 $I(I=(a,b]$或$[a,b))$之全体,试证明 $\bigcup\limits_{I\in\Gamma}I$ 是可测集.

(3) 试作出互不相交的点集列$\{E_k\}$,使得

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)<\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k).$$

(4) 试作递减集合列$\{A_k\}$满足

$$m^*(A_k)<+\infty\ (k\in\mathbf{N}),\quad m^*(\lim_{k\to\infty}A_k)<\lim_{k\to\infty}m^*(A_k).$$

解 (1) 不. 例如记 W 是 $\mathbf{R}^1$ 中的不可测集,则由 $\bigcap\limits_{a\in W}\{a\}^c=\left(\bigcup\limits_{a\in W}\{a\}\right)^c=W^c$ 可知(可测集$\{a\}^c=\mathbf{R}^1-\{a\}$)对 $a\in W$,作交是不可测集.

(2) 用等价关系: $I\sim J(I\cap J\neq\varnothing)$将 Γ 分解成由等价类形成的类族,易知每个等价类中一切半开闭区间的并集是一个区间,从而 $\bigcup\limits_{I\in\Gamma}I$

是可测集.

(3) 设 $W\subset(0,1)$是不可测集,令$\{r_k\}=\mathbf{Q}\cap(-1,1)$,以及 $E_k=W+\{r_k\}(k\in\mathbf{N})$,即为所求.

(4) 采用(3)中之$\{E_k\}$,且令

$$A_k=(0,1)\setminus\bigcup_{i=1}^{k}E_i\quad(k=1,2,\cdots),$$

易知 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(A_k)>m^*(\lim\limits_{k\to\infty}A_k)=0$.

例 4 试证明下列命题:

(1) 设 W 是不可测集,E 是可测集. 试证明 $E\triangle W$ 是不可测集.

(2) 设 $W\subset[0,1]$是不可测集,则存在 ε_0: $0<\varepsilon_0<1$,使得对$[0,1]$中任一可测集 E: $m(E)\geqslant\varepsilon_0$,$E\cap W$ 均不可测.

证明 (1) 不妨设 $m(E)>0$,用反证法. 假定 $E\triangle W$ 是可测集,则由

$$E\cup W=(E\cap W)\cup(E\triangle W),$$

易推出 $E\cap W$ 是不可测集(因为否则有 $E\cup W$ 可测. 从而当 $W\setminus E\neq\varnothing$ 时,$W\setminus E=(E\cup W)\setminus E$ 是可测集. 再根据假定,又知 $E\setminus W$ 是可测集. 由此就得到

$$W=(W\setminus E)\cup(W\cap E)$$

是可测集,与题设矛盾. 这说明 $E\cap W$ 不可测). 从而 $E\triangle W$ 就不可测.

(2) 反证法. 若对任给 ε: $0<\varepsilon<1$,均存在 $E_\varepsilon\subset[0,1]$: $m(E_\varepsilon)\geqslant\varepsilon$,使得 $E_\varepsilon\cap W$ 是可测集,则对 ε_n: $0<\varepsilon_n<1$ 且 $\varepsilon_n\to1(n\to\infty)$,记 $E_n=E_{\varepsilon_n}$ $(n\in\mathbf{N})$,又作 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,可知

$$\varepsilon_n\leqslant m(E_n)\leqslant m(E)\leqslant1\quad(n\in\mathbf{N}).$$

现在令 $n\to\infty$,易知 $m(E)=1$. 因为我们有

$$m(([0,1]\setminus E)\cap W)\leqslant m([0,1]\setminus E)=0,$$

所以 $m(([0,1]\setminus E)\cap W)=0$. 这说明$([0,1]\setminus E)\cap W$ 可测. 但另一方面又有

$$\begin{aligned}W&=(W\cap E)\cup(W\cap([0,1]\setminus E))\\&=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(W\cap E_n)\right)\cup(W\cap([0,1]\setminus E)).\end{aligned}$$

注意上式右端是可测集,从而推出 W 是可测集. 矛盾,证毕.

§2.6 连续变换与可测集

基本内容

定义 设有变换 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. 若对任一开集 $G\subset\mathbf{R}^n$,逆像集

$$T^{-1}(G) \text{ 即 } \{x\in\mathbf{R}^n:\ T(x)\in G\}$$

是一个开集,则称 T 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的**连续变换**.

定理 1 变换 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是连续变换的充分且必要条件是:对任一点 $x\in\mathbf{R}^n$ 以及 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|y-x|<\delta$ 时,有 $|T(y)-T(x)|<\varepsilon$.

定理 2 设 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是连续变换. 若 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集,则 $T(K)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集.

推论 1 设 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是连续变换. 若 E 是 F_σ 集,则 $T(E)$是 F_σ 集.

推论 2 设 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是连续变换. 若对 $\mathbf{R}^n$ 中的任一零测集 Z,$T(Z)$必为零测集,则对 $\mathbf{R}^n$ 中的任一可测集 E,$T(E)$必为可测集.

定理 3 若 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是非奇异线性变换,$E\subset\mathbf{R}^n$,则

$$m^*(T(E))=|\det T|\cdot m^*(E).$$

($|\det T|$表示矩阵 T 的行列式的绝对值.)

推论 设 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是非奇异线性变换. 若 $E\in\mathscr{M}$,则 $T(E)\in\mathscr{M}$ 且有

$$m(T(E)) = |\det T|\cdot m(E).$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 若 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是线性变换,则 T 是连续变换.

(2) 若 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是可测集,则将 E 作旋转变换后所成集为可测集,且测度不变.

(3) $\mathbf{R}^2$ 中三角形的测度等于它的面积.

(4) 圆盘 $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant r^2\}$是 $\mathbf{R}^2$ 中可测集,且 $m(D)=\pi r^2$.

(5) 设 $E\subset(-\pi,\pi]$, $0\leqslant a<b\leqslant+\infty$,令

$$S_E=S_E(a,b)=\{(r\cos\theta,r\sin\theta):\ a<r<b,\theta\in E\}.$$

大家知道,若 $E=(\alpha,\beta)$,则 S_E 就是通常所说的扇形,其面积为

$$(b^2-a^2)(\beta-\alpha)/2.$$

(Ⅰ) 对于一般点集 E，我们有 $m^*(S_E)\leqslant(b^2-a^2)m^*(E)/2$.
（注意，这里 $m^*(S_E)$ 是二维外测度，$m^*(E)$ 是一维外测度.）

(Ⅱ) 若 $E\subset(-\pi,\pi]$ 是可测集，则 S_E 是可测集.

证明 (1) 事实上，令 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一组基，则对 $\mathbf{R}^n$ 中任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，有

$$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n.$$

再令 $T(e_i)=x_i(i=1,2,\cdots,n)$，又有

$$T(x)=\xi_1x_1+\cdots+\xi_nx_n.$$

记 $M=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$ 可得

$$\begin{aligned}|T(x)|&\leqslant|\xi_1||x_1|+\cdots+|\xi_n||x_n|\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}=M\cdot|x|.\end{aligned}$$

由此可知

$$|T(y)-T(x)|=|T(y-x)|\leqslant M|y-x|.$$

这说明 T 是连续变换.

(2) 证略.

(3) 显然，$\mathbf{R}^2$ 中任一三角形都是可测集. 由于测度的平移不变性，故不妨假定三角形的一个顶点在原点，且记此三角形为 A，其面积记为 $|A|$. 因为 $m(A)=m(-A)$，所以经平移后可得 $2m(A)=m(A)+m(-A)=m(P)$，其中 P 是平行四边形. 再将 P 中的子三角形作旋转或平移，可使 P 转换为矩形 Q，且有 $m(P)=m(Q)=|P|=2|A|$. 从而得 $m(A)=|A|$.

(4) 记 P_n 与 Q_n 为 D 的内接与外切 n 边正多边形序列，由一切 P_n 与 Q_n 的可测性易知 D 是可测集，注意到 $P_n\subset D\subset Q_n$，以及

$$m(P_n)=\pi r^2\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}\cos\frac{\pi}{n}\to\pi r^2\quad(n\to\infty),$$

$$m(Q_n)=\pi r^2\frac{\tan(\pi/n)}{\pi/n}\to\pi r^2\quad(n\to\infty)$$

可知 $m(D)=\pi r^2$.

(5) (Ⅰ) (i) 设 $b<+\infty$. 此时，对任给 $\varepsilon>0$，存在开区间列 $\{I_n\}$：

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \supset E, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^*(E)+\varepsilon$. 显然，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{I_n} \supset S_E$，从而有

$$m^*(S_E) \leqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{I_n} \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(S_{I_n})$$

$$= (b^2 - a^2)\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|/2 \leqslant \frac{b^2 - a^2}{2}(m^*(E) + \varepsilon),$$

由 ε 的任意性即得所证.

(ii) 设 $b=+\infty, m^*(E)=0$. 此时，对 $n\geqslant 1$，由(i)知

$$m^*(S_E(a,n)) \leqslant (n^2 - a^2)m^*(E)/2 = 0.$$

从而得到

$$m^*(S_E(a,\infty)) = \lim_{n\to\infty} m^*(S_E(n)) = 0.$$

(iii) 设 $b=+\infty, m^*(E)>0$. 结论显然.

(Ⅱ) 由于 $S_E(a,b)=S_E(0,\infty)\cap S_{(-\pi,\pi]}(a,b)$，从而只需要指出 $S_E(0,\infty)$ 可测即可.

设 $I\subset(-\pi,\pi]$ 是开区间，记 $T=S_I(a,b)$（开环扇形），$E^c=(-\pi,\pi]\setminus E$ 以及 $S_E=S_E(0,+\infty)$，我们有

$$\begin{aligned} & m^*(T \cap S_E) + m^*(T \cap S_{E^c}) \\ & \quad = m^*(S_{I\cap E}(a,b)) + m^*(S_{I\cap E^c}(a,b)) \\ & \quad \leqslant \frac{b^2 - a^2}{2}\{m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c)\} \\ & \quad = \frac{b^2 - a^2}{2}|I| = m(T). \text{（开环扇形面积）}. \end{aligned}$$

设 R 是一个开矩形，易知它可由互不相重的可列个开环扇形 T_n 组成，至多差一零测集（边界）. 因此（注意，开环扇形可测）得到

$$\begin{aligned} & m^*(R \cap S_E) + m^*(R \cap S_{E^c}) \\ & \quad \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(T_n \cap S_E) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(T_n \cap S_{E^c}) \\ & \quad \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(T_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right) = m(R). \end{aligned}$$

这说明，对任一矩形 R，有

$$m(R) = m^*(R \cap S_E) + m^*(R \cap S_{E^c}).$$

而 S_{E^c} 就是 S_E 的补集(除原点外)，也就是说 S_E 是可测集.

例 2 试证明下列命题：

(1) 试证明 $\mathbf{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度是旋转不变的.

(2) 设 $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是一一映射，且保持点集的外测度不变，则对于可测集 E，$T(E)$ 必是可测集.

(3) 设 $T: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ 是一一映射. 若对任意的矩体 $I \subset \mathbf{R}^n$，均有 $|I| \geqslant m^*(T(I))$，$|I| \geqslant m^*(T^{-1}(I))$，则 T 是保测映射.

证明 (1) $\mathbf{R}^2$ 上的旋转变换是可由矩形

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (TT' = T'T = I)$$

表示的线性变换，其中 θ 表示旋转角. 从而对 $E \subset \mathbf{R}^2$，我们有

$$m(T(E)) = |\det E| \cdot m(E) = m(E).$$

(2) 对任意的 $A \subset \mathbf{R}^n$，我们有

$$m^*(T^{-1}(A)) = m^*(T^{-1}(A) \cap E) + m^*(T^{-1}(A) \cap E^c).$$

从而由题设知

$$m^*(A) = m^*(A \cap T(E)) + m^*(A \cap (T(E)^c).$$

这说明 $T(E)$ 是可测集.

(3) 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 对任给 ε，作 $G = \bigcup_{i \geqslant 1} I_i$ (I_i 是矩体)：$G \supset E$，且 $m^*(E) > m(G) - \varepsilon = \sum_{i \geqslant 1} |I_i| - \varepsilon$，我们有

$$T(E) \subset \bigcup_{i \geqslant 1} T(I_i),$$

$$m^*(T(E)) \leqslant \sum_{i \geqslant 1} m^*(T(I_i)) \leqslant \sum_{i \geqslant 1} |I_i| < m^*(E) + \varepsilon.$$

此外，对任给 $\varepsilon > 0$，又作 $H = \bigcup_{k \geqslant 1} J_k$：$H \supset T(E)$，而且 $m^*(T(E)) > \sum_{k \geqslant 1} |J_k| - \varepsilon$. 我们有(类似的推理)

$$E \subset \bigcup_{k \geqslant 1} T^{-1}(J_k), \quad m^*(E) < m^*(T(E)) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，可知 $m^*(T(E)) = m^*(E)$. 根据(2)即得所证.

第三章 可测函数

§3.1 可测函数的定义及其性质

基本内容

定义 1 设 $f(x)$是定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实值函数.若对于任意的实数 t,点集

$$\{x\in E:\ f(x)>t\}\ (\text{或简写为}\{x:\ f(x)>t\})$$

是可测集,则称 $f(x)$是 E 上的**可测函数**,或称 $f(x)$在 E 上**可测**.

定理 1 设 $f(x)$是可测集 E 上的函数,D 是 $\mathbf{R}^1$ 中的一个稠密集.若对任意的 $r\in D$,点集$\{x:\ f(x)>r\}$都是可测集,则对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$,点集$\{x:\ f(x)>t\}$也是可测集.

定理 2 若 $f(x)$是 E 上可测函数,则下列等式中左端的点集皆可测:

(i) $\{x:\ f(x)\leqslant t\}=E\setminus\{x:\ f(x)>t\}\quad(t\in\mathbf{R}^1)$;

(ii) $\{x:\ f(x)\geqslant t\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x:\ f(x)>t-\dfrac{1}{k}\right\}\quad(t\in\mathbf{R}^1)$;

(iii) $\{x:\ f(x)<t\}=E\setminus\{x:\ f(x)\geqslant t\}\quad(t\in\mathbf{R}^1)$;

(iv) $\{x:\ f(x)=t\}=\{x:\ f(x)\geqslant t\}\cap\{x:\ f(x)\leqslant t\}\quad(t\in\mathbf{R}^1)$;

(v) $\{x:\ f(x)<+\infty\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:\ f(x)<k\}$;

(vi) $\{x:\ f(x)=+\infty\}=E\setminus\{x:\ f(x)<+\infty\}$;

(vii) $\{x:\ f(x)>-\infty\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:\ f(x)>-k\}$;

(viii) $\{x:\ f(x)=-\infty\}=E\setminus\{x:\ f(x)>-\infty\}$.

定理 3 (i) 设 $f(x)$是定义在 $E_1\cup E_2\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实值函数,若 $f(x)$在 E_1 上可测,在 E_2 上也可测,则 $f(x)$在 $E_1\cup E_2$ 上可测.

(ii) 若 $f(x)$在 E 上可测,A 是 E 中可测集,则 $f(x)$看做是定义在 A 上的函数在 A 上也是可测的.

定理 4(可测函数的运算性质(1)) 若 $f(x)$,$g(x)$是 E 上的实值可测函数,则下列函数

(i) $cf(x)(c\in\mathbf{R}^1)$； (ii) $f(x)+g(x)$； (iii) $f(x)\cdot g(x)$

都是 E 上的可测函数.

推论 上述定理所说的运算性质对于取广义实值的可测函数也是成立的.

定理 5(可测函数的运算性质(2)) 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，则下列函数

(i) $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$； (ii) $\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$； (iii) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)$； (iv) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)$

都是 E 上的可测函数.

推论 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),$$

则 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

定义 2 设 $f(x)$ 是定义在 E 上的广义实值函数，令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},\quad f^-(x)=\max\{-f(x),0\},$$

并分别称它们为 $f(x)$ 的正部与负部. 显然我们有

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x).$$

若 $f(x)$ 在 E 上是可测的，则 $f^+(x)$，$f^-(x)$ 都是 E 上的可测函数. 反之亦然. 此外，因为我们有

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x),$$

所以当 $f(x)$ 在 E 上可测时，$|f(x)|$ 也在 E 上可测. 但反之不然.

定义 3 设有一个与集合 $E\subset\mathbf{R}^n$ 中的点 x 有关的命题 $P(x)$. 若除了 E 中的一个零测集以外，$P(x)$ 皆为真，则称 $P(x)$ 在 E 上**几乎处处是真的**，并简记为 $P(x)$，a.e. $x\in E$. 例如

(i) 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数. 若有

$$m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})=0,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上**几乎处处相等**，也称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**对等的**，记为 $f(x)=g(x)$，a.e. $x\in E$.

(ii) 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，若有

$$m(\{x\in E: |f(x)|=+\infty\})=0,$$

则称 $f(x)$ 在 E 上是**几乎处处有限的**，并记为

$$|f(x)|<\infty,\quad \text{a.e. } x\in E.$$

注意，$|f(x)|<\infty$，a.e. $x\in E$. 与 $|f(x)|<M$，a.e. $x\in E$ 是不同的. 后者蕴含前者，但反之不然.

定理 6 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实值函数，$f(x)$ 是 E 上可测函数. 若 $f(x)=g(x)$，a.e. $x\in E$，则 $g(x)$ 在 E 上可测.

定义 4(简单函数) 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数. 若

$$\{y:\ y=f(x),\ x\in E\}$$

是有限集，则称 $f(x)$ 为 E 上的**简单函数**.

设 $f(x)$ 是 E 上的简单函数，且有

$$E=\bigcup_{i=1}^{p}E_i,\quad E_i\cap E_j=\varnothing,\qquad i,j=1,2,\cdots,p.$$
$$f(x)=c_i,\quad x\in E_i,$$

此时可将 f 记为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x),\quad x\in E.\qquad(*)$$

从而简单函数是有限个特征函数的线性组合. 特别地，当每个 E_i 是矩体（这里允许取无限大的矩体）时，称 $f(x)$ 是**阶梯函数**.

显然，若 $f(x),g(x)$ 是 E 上的简单函数，则 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x)$ 也是 E 上的简单函数.

若 $f(x)$ 是 E 上的简单函数，且(*)式中的每个 E_i 都是可测集，则称 $f(x)$ 是 E 上的**可测简单函数**.

定理 7（简单函数逼近） (i) 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，则存在非负可测的简单函数渐升列：

$$\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x),\quad k=1,2,\cdots,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E;$$

(ii) 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，使得 $|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|$，且有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E.$$

若 $f(x)$ 还是有界的，则上述收敛是一致的.

定义 5 对于定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x)$，我们称点集 $\{x:\ f(x)\neq0\}$ 的闭包为 $f(x)$ 的**支集**，记为 $\mathrm{supp}(f)$. 若 $f(x)$ 的支集是有界（即支集是紧集）的，则称 $f(x)$ 是**具有紧支集**的函数.

推论 定理 7 中所说的可测简单函数列中的每一个均可取成具有紧支集的函数.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

(2) 若 $E\in\mathscr{M}$，则 $\chi_E(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集. 若 $f\in C(E)$，则 $f(x)$是 E 上的可测函数.

(4) 设 $f(x),g(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的实值可测函数.

(i) 则 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\},m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$是可测函数.

(ii) 若 $f(x)>0$，则 $f(x)^{g(x)}$是可测函数.

证明 (1) 事实上，对于任意的 $t\in\mathbf{R}^1$，点集$\{x\in[a,b]: f(x)>t\}$定属于下述三种情况之一：区间，单点集或空集. 从而可知

$$\{x\in[a,b]: f(x)>t\}$$

是可测集. 这说明 $f(x)$是$[a,b]$上的可测函数.

(2) 令 $A_t=\{x\in\mathbf{R}^n: \chi_E(x)>t\}$，我们有

$$A_t=\begin{cases}\varnothing, & t\geqslant 1,\\ E, & 1>t\geqslant 0,\\ \mathbf{R}^n, & 0>t.\end{cases}$$

(3) 参阅 1.2.3 中例 5 之(3).

(4) (i) 注意 $M(x)=[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]/2$，以及 $m(x)=[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]/2$.

(ii) 注意，由$\{x: \ln f(x)>t\}=\{x: f(x)>\mathrm{e}^t\}$可知 $\ln f(x)$是可测函数. 而经指对数变换后对 $f(x)^{g(x)}$的可测性，只需看 $g(x)\cdot\ln f(x)$的可测性.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$在 E 上可测，且$\{x\in E: f(x)>0\}$是可测集，则 $f(x)$在 E 上可测.

(2) 设$\{E_k\}\subset\mathbf{R}^n$ 是互不相交的可测集列. 若 $f(x)$在 $E_k(k=1,2,\cdots)$上是可测的，则 $f(x)$在 $\bigcup\limits_{1}^{\infty}E_k$ 上也是可测的.

(3) 记 $\mathscr{F}$ 为$(0,1)$上的一个连续函数族，则函数$(0<x<1)$

$$\Phi(x)=\sup_{f\in\mathscr{F}}\{f(x)\},\quad \Psi(x)=\inf_{f\in\mathscr{F}}\{f(x)\}$$

是$(0,1)$上的可测函数.

证明 (1) 令 $A=\{x\in E: f(x)>0\},B=\{x\in E: f(x)\leqslant 0\}$，则

$f(x)=|f(x)|(\chi_A(x)-\chi_B(x))(x\in E)$. 注意，由 $f^2(x)$的可测性知，$|f(x)|$可测.（看$\{x\in E: |f(x)|>t\}(t\geqslant 0)$以及$\{x\in E: f^2(x)>t^2\}$）

（2）证略.

（3）对 $\Phi(x)$，设 $t\in\mathbf{R}^1$. 若 $x_0\in\{x\in(0,1): \Phi(x)>t\}\triangleq E_t$，则存在 $f\in\mathscr{F}$: $f(x_0)>t$. 因为 $f(x)$连续，所以存在 $\delta_0>0$，使得

$$f(x)>t\quad(x_0-\delta_0<x<x_0+\delta_0).$$

由此又知 $\Phi(x)>t(x_0-\delta_0<x<x_0+\delta_0)$. 这说明 x_0 是点集 E_t 之内点，即 E_t 是开集，$\Phi(x)$是可测函数.

类似地可推出 $\Psi(x)$是可测函数.

例 3 试证明下列命题：

（1）设 $f(x)$是(a,b)上的实值函数，则

$$\overline{D}f(x)=\overline{\lim_{y\to x}}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad \underline{D}f(x)=\underline{\lim_{y\to x}}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

是(a,b)上的可测函数.

（2）设 $f(x)$在$[a,b)$上存在右导数，则右导函数 $f'_+(x)$是$[a,b)$上的可测函数.

（3）存在$(0,1)$上的函数 $f(x)$，其 $D^+f(x)$在$(0,1)$上不是可测函数（若 $f\in C((0,1))$且递增，则 $D^+f(x)$在$(0,1)$上可测）.

（4）设 $f(x)$是(a,b)上的实值函数，$D\subset(a,b)$是 $f(x)$的可微点集，则 $f'(x)$在 D 上可测.

证明 （1）以 $\overline{D}f(x)$为例，考察点集（假设非空）

$$D=\{x\in(a,b): \overline{D}f(x)>t\},\ t\in\mathbf{R}^1.$$

设对 m,n，作区间$[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得

$$|x_2-x_1|<\frac{1}{m},\quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>t+\frac{1}{n},$$

且记一切如此的区间的并集为 $E_{m,n}$. 下面指出

$$E\triangleq\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{m,n}=D.$$

（i）若 $x\in D$，则存在 n_0，$\overline{D}f(x)>t+1/n_0$. 从而对每个 m，有 $y\in(a,b)$，使得

$$0<|y-x|<\frac{1}{m},\quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}>t+\frac{1}{n_0}.$$

这说明 $x\in E_{m,n_0}$(一切 m),即 $x\in E$.

(ii) 若 $x\in E$,则存在 n_0,$x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{m,n_0}$,即对每个 m,存在$[x_1,x_2]$,$x_1\leqslant x\leqslant x_2$,使得

$$|x_2-x_1|<\frac{1}{m},\qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>t+\frac{1}{n_0}.$$

这说明我们有

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}>t+\frac{1}{n_0}\ \text{或}\ \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}>t+\frac{1}{n_0},$$

或说存在 $y\in(a,b)$,使得

$$0<|y-x|<\frac{1}{m},\qquad \frac{f(y)-f(x)}{y-x}>t+\frac{1}{n_0},$$

即 $\overline{D}f(x)>t$, $x\in D$.

(2) 依题设知,$f(x)$是几乎处处连续的,因此是可测函数,自然 $f(x+1/n)$也是可测的. 再根据

$$\lim_{n\to\infty}n[f(x+1/n)-f(x)]=f'_+(x),$$

即得所证.

(3) 设 W 是(0,1)中不含有理点的不可测集,作

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in W,\\ 1, & x\in(0,1)\setminus W.\end{cases}$$

若 $x_0\in W$,我们有(取 $x\in\mathbf{Q}$)

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1-0}{x-x_0}\to D^+f(x_0)=+\infty(x\to x_0^+).$$

若 $x_0\in(0,1)\setminus W$,我们有

$$D^+f(x_0)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{0<x-x_0<\delta}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\overline{\lim_{x\to x_0^+}}\frac{1-1}{x-x_0}=0.$$

由此即得所证.$\Big(\{x\in(0,1):D^+f(x)\geqslant t\}=\bigcap_{i,k=1}^{\infty}\{x\in(0,1):$ 存在 $0<h<1/i,[f(x+h)-f(x)]/h>t-1/k\}\Big)$

(4) 令 $C=\{x\in(a,b):f(x)$在 x 处连续$\}$,则 $C\supset D$ 且 C 是 G_δ 型集. 对 $\varepsilon>0,\delta>0$,点集 $E_{\varepsilon,\delta}=\Big\{x\in C:$ 存在 $y\in(a,b):0<|x-y|$

$<\delta$ 且 $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}>\varepsilon\Big\}$ 是 Borel 集(是 C 与某开集之交集),且有

$$\{x\in C:\ D^+f(x)>0\}=\bigcup_{\substack{\varepsilon\in\mathbf{Q}\\ \varepsilon>0}}\bigcap_{\substack{\delta\in\mathbf{Q}\\ \delta>0}}E_{\varepsilon,\delta},$$

从而知$\{x\in C:\ D^+f(x)>0\}$是 Borel 集. 将此推理应用于 $f(x)-\alpha x$ 以及 $\alpha x-f(x)$,可知对任意的 α,点集

$$\{x\in C:\ D^+f(x)>\alpha\},\quad \{x\in C:\ D^-f(x)<\alpha\}$$

都是 Borel 集. 注意到

$$\begin{aligned}C\setminus D=&\Big(\bigcup_{r\in\mathbf{Q}}\{x\in C:\ D^+f(x)>r,D^-f(x)<r\}\Big)\\ &\cup\Big(\bigcap_{r\in\mathbf{Q}}(\{x\in C:\ D^+f(x)>r\}\Big)\\ &\cup\Big(\bigcap_{r\in\mathbf{Q}}\{x\in C:\ D^-f(x)<r\}\Big),\end{aligned}$$

以及 D 是 Borel 集,$\{x\in D:\ f'(x)>r\}=D\cap\{x\in C:\ D^+f(x)>r\}$,可知$\{x\in D:\ f'(x)>r\}$是 Borel 集,$f'(x)$在 D 上可测.

例 4 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上可测,G 和 F 各为 $\mathbf{R}^1$ 中的开集和闭集,则点集

$$E_1=\{x\in E:\ f(x)\in G\},\quad E_2=\{x\in E:\ f(x)\in F\}$$

是可测集.

(2) 若$\{f_k(x)\}$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数列,则 $f_k(x)$在 E 上收敛的点集是可测集.

证明 (1) 不妨假定 $G=\bigcup\limits_{n\geqslant1}(a_n,b_n)$,则由

$$\begin{aligned}\{x\in E:\ f(x)\in G\}=\bigcup_{n\geqslant1}(&\{x\in E:\ f(x)>a_n\}\\ &\cap\{x\in E:\ f(x)<b_n\})\end{aligned}$$

可知,上式左端是可测集. 对于闭集 F,只需注意

$$\{x\in E:\ f(x)\in F\}=E\setminus\{x\in E:\ f(x)\in F^c\}$$

即可.

(2) 注意不收敛点集的结构(见周民强编的《实变函数论》第一章§1.2 集合的运算中的例).

例 5 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，$m(E)<+\infty$，试证明对任意的 $\varepsilon>0$，存在 E 上的有界可测函数 $g(x)$，使得

$$m(\{x\in E:\ |f(x)-g(x)|>0\})<\varepsilon.$$

(2)（局部有界化） 设 $0<m(A)<+\infty$，$f(x)$是 $A\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，且有 $0<f(x)<+\infty$（a. e. $x\in A$），试证明对任给的 δ：$0<\delta<m(A)$，存在 $B\subset A$ 以及自然数 k_0，使得

$$m(A\setminus B)<\delta,\quad \frac{1}{k_0}\leqslant f(x)\leqslant k_0,\quad x\in B.$$

(3) 设 $f(x)$是可测集 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，试作 $\mathbf{R}^1$ 上可测函数列$\{\varphi_k(x)\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)(x\in E)$.

解 (1) 作点集 $E_k=\{x\in E:\ |f(x)|>k\}(k\in\mathbf{N})$，$X=\{x\in E:\ |f(x)|=+\infty\}$，则

$$m(X)=0,\quad E_k\supset E_{k+1}(k\in\mathbf{N}),\quad X=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k.$$

由此知 $m(E_k)\to m(X)=0(k\to\infty)$，故对任给 $\varepsilon>0$，存在 E_{k_0}：$m(E_{k_0})<\varepsilon$. 我们作函数

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E\setminus E_{k_0},\\ 0, & x\in E_{k_0},\end{cases}\qquad |g(x)|\leqslant k_0,$$

易知$\{x\in E:\ f(x)\neq g(x)\}\subset E_{k_0}$，证毕.

(2) 记 $A_k=\{x\in A:\ 1/k\leqslant f(x)\leqslant k\}$ $(k=1,2,\cdots)$，$Z_1=\{x\in A:\ f(x)=0\}$，$Z_2=\{x\in A:\ f(x)=+\infty\}$，易知 $m(Z_1)=m(Z_2)=0$，且有

$$A=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cup Z_1\cup Z_2,$$
$$A_k\subset A_{k+1}\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此可知 $m(A_k)\to m(A)$ $(k\to\infty)$. 从而存在 k_0，使 $m(A\setminus A_{k_0})<\delta$. 取 $B=A_{k_0}$，即得所证.

(3) 对每个 $k\in\mathbf{N}$，作闭集 $F_k\subset E$，满足 $m(E\setminus F_k)<1/2^k$，从而存在 $g_k\in C(\mathbf{R}^1)$，使得 $g_k(x)=f(x)(x\in F_k,k\in\mathbf{N}$（见周民强编《实变函数论》中 §1.6 的定理 1.27)). 现在令$\varphi_k(x)=g_k(x)\cdot\chi_E(x)(k\in\mathbf{N})$，易知

$m(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus F_k))=0$,每个$\varphi_k(x)$均可测,且有 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$.

例 6 解答下列问题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$. 若有定义在$[a,b]$上的函数 $g(x)$: $g(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$,试问 $g(x)$在$[a,b]$上必是几乎处处连续的吗?

(2) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上几乎处处连续的函数,试问是否存在 $g\in C(\mathbf{R}^1)$,使得 $g(x)=f(x)$,a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(3) 试作 $\mathbf{R}^1$ 上的单调函数 $f(x)$,它在任一开区间上都不对等于一个连续函数.

(4) 试作$[0,1]$上无处连续的函数 $f(x)$,使得改变其在任一零测集上的函数值,$f(x)$仍无处连续.

解 (1) 不. 例如 $f(x)=0(0\leqslant x\leqslant 1)$,$g(x)$是 Dirichlet 函数,易知 $f(x)=g(x)$,a.e. $x\in[0,1]$,但 $g(x)$无处连续.

(2) 不一定. 例如 $f(x)=\chi_{[1,\infty)}(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上几乎处处连续,但不存在 $g\in C(\mathbf{R}^1)$,使得 $f(x)=g(x)$,a.e. $x\in\mathbf{R}^1$. (注意点 $x_0=1$ 的附近)

(3) 令 $\mathbf{Q}=\{r_n\}$,$\varphi(x)=\chi_{[0,\infty)}(x)$,$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(x-r_n)/2^n$.

(4) 取点集 $E\subset[0,1]$,使得对任一开区间 $I\subset[0,1]$,有 $m(E\cap I)>0$,$m(I\cap([0,1]\setminus E))>0$(参阅§2.3 中例 8 之(3)),并作函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus E.\end{cases}$$

例 7 解答下列问题:

(1) 设有指标集 I,$\{f_\alpha(x):\alpha\in I\}$是 $\mathbf{R}^n$ 上可测函数族,试问函数 $S(x)=\sup\{f_\alpha(x):\alpha\in I\}$在 $\mathbf{R}^n$ 上是可测的吗?

(2) 在$(0,1]$上定义函数 $f(x)$如下:若 $x\in(0,1]$在十进位小数表示式(采用无穷位小数表示)为

$$x=0.a_1a_2\cdots a_k\cdots,$$

则令 $f(x)=\max\{a_k: k\in\mathbf{N}\}$,试证明 $f(x)$在$(0,1]$上可测.

解 (1) 不一定. 例如令 $W\subset[0,1]$是不可测集,对 $\alpha\in W$,作函数

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=\alpha,\\ 0, & x\neq\alpha,\end{cases}\quad x\in[0,1],$$

则 $S(x)=\chi_W(x)$即可得证.

(2) 对每个 $k\in\mathbf{N}$，作函数 $f_k(x)=a_k$（如 $f_1(x)$：$f_1(x)=0(0<x\leqslant 0.1)$，$f_1(x)=1(0.1<x\leqslant 0.2)$，…，$f_1(x)=9(0.9<x<1]$），易知 $f_k(x)(k\in\mathbf{N})$是简单函数，且有

$$f(x)=\sup\{f_k(x):k\in\mathbf{N}\},\quad x\in(0,1].$$

例 8 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可测. 若有 $f(x+1)=f(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$，试作 $\mathbf{R}^1$ 上函数 $g(x)$：$g(x)=f(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$，$g(x)=g(x+1)(x\in\mathbf{R}^1)$.

(2) 设 $E\times[0,1]$上 $f(x,y)$满足：$f(x,y)$是 $x\in E$ 上的可测函数，且 $f(x,y)$是 $y\in[0,1]$上的连续函数，试证明：

(i) $f(x,y)$是 $E\times[0,1]$上可测函数.

(ii) $M(x)=\max\{f(x,y):0\leqslant y\leqslant 1\}$是 E 上的可测函数.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集，定义在 $E\times(0,1)$上的$f(x,y)$满足：$f(x,y)$是 E 上（y 固定）的可测函数，又是$(0,1)$上（$x\in E$ 固定）的连续函数，试证明：

$$H(x)=\overline{\lim_{y\to 0+}}f(x,y),\quad h(x)=\underline{\lim_{y\to 0+}}f(x,y)$$

均在 E 上可测.

(4) 定义在$(0,1]\times(0,1]$上的 $f(x,y)$满足：$f(x,y)$是 x 的（y 固定）可测函数，又是 y 在$(0,1]$上（x 固定）的递增函数，试证明$f(x,y)$在$(0,1]\times(0,1]$上可测.

解 (1) 作点集 $E=\{x\in\mathbf{R}^1:f(x)\neq f(x+1)\}$，且令 $\widetilde{E}=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(E+\{n\})$，再作函数

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\overline{\in}\widetilde{E},\\ 0, & x\in\widetilde{E},\end{cases}$$

即为所求.

(2) (i) 将$[0,1]$ 2^n 等分：分点 $k/2^n(k=0,1,2,\cdots,2^n)$，作

$$f_n(x,y)=f(x,k/2^n)$$

$$(k/2^n\leqslant y<(k+1)/2^n,k=0,1,2,\cdots,2^n-1),$$

则由 f 对 y 的连续性可知，$f_n(x,y)\to f(x,y)(n\to\infty)$，而 $f_n(x,y)$在 $E\times[0,1]$上可测.

(ii) 记$[0,1]$中的有理数为$\{r_n\}$，则 $M(x)\geqslant\sup_n\{f(x,r_n)\}$. 又存在

$y_x \in [0,1]$,使得 $M(x)=f(x,y_x)(x\in E)$.

对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|y_x-y|<\delta$ 时,有

$$f(x,y_x) < f(x,y) + \varepsilon \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\{f(x,r_n)\} + \varepsilon.$$

由此又得 $M(x)\leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1}\{f(x,r_n)\}$.

总之,我们有 $M(x)=\sup\limits_{n\geqslant 1}\{f(x,r_n)\}$. 根据 $f(x,r_n)$在 E 上的可测性可知,$M(x)$在 E 上可测.

(3) 令 $H_n(x)=\sup\limits_{0<y<1/n}\{f(x,y)\}$,我们有

$$H_n(x) \geqslant H_{n+1}(x)(n\in \mathbf{N}), \quad \lim_{n\to\infty} H_n(x) = \overline{\lim_{y\to 0+}} f(x,y).$$

令$\{r_k\}$是$(0,1/n)$中的有理数全体,则得

$$H_n(x) = \sup_{k\geqslant 1}\{f(x,r_k)\} = \sup_{0<y<1/n}\{f(x,y)\}.$$

由此知 $H_n(x)$在 E 上可测,因此 $H(x)$在 E 上可测.

类似地可证 $h(x)$在 E 上可测.

(4) 对每个 $n\in\mathbf{N}, t\in\mathbf{R}^1$,作点集$(k=1,2,\cdots,2^n)$

$$E_k(t) = \left\{x\in(0,1]: f\left(x,\frac{k-1}{2^n}\right) < t \leqslant f\left(x,\frac{k}{2^n}\right)\right\},$$

易知 $E_k(t)$是可测集,且 $E_i(t)\cap E_j(t)=\varnothing(i\neq j)$, $\bigcup\limits_{k=1}^{2^n} E_k(t)\subset(0,1]$. 又令

$$A_n(t) = \bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\left\{x\in(0,1]: f\left(x,\frac{k}{2^n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]\right),$$

$$B_n(t) = \bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\left\{x\in(0,1]: f\left(x,\frac{k-1}{2^n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]\right),$$

从而对 $(x,y)\in B_n(t)\setminus A_n(t)$,则只有唯一的 k,使得 $x\in E_k(t)$, $f(x,(k-1)/2^n)<t$,且由 f 对 y 的递增性可知,$y\leqslant k/2^n$. 又因$(x,y)\overline{\in} A_n(t)$, $f(x,k/2^n)\geqslant t$, $y>(k-1)/2^n$,所以$(x,y)\in E_k(t)\times((k-1)/2^n,k/2^n]$. 这说明

$$B_n(t)\setminus A_n(t) \subset \bigcup_{k=1}^{2^n}\left(E_k(t)\times\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]\right),$$

$$m(B_n(t)\setminus A_n(t)) \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} m(E_k(t))\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} m\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} E_k(t)\right) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

$$m(B(t)\setminus A(t)) = \lim_{n\to\infty} m(B_n(t)\setminus A_n(t)) = 0.$$

令 $\widetilde{E}(t)=\{(x,y): f(x,y)<t\}$，则由

$$A_n(t) \subset \widetilde{E}(t) \subset B_n(t) \quad (n \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{R}^1),$$

即得所证.

例 9 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的实值可测函数列，试证明存在正数列 $\{a_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} a_k \cdot f_k(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

证明 选数列 $\{b_n\}$，且令 $E_n=\{x\in[a,b]: |f_n(x)|\leqslant b_n\}$，还满足 $m([a,b]\setminus E_n)<1/2^{n+1}$. 令 $a_n=1/(nb_n)(n\in\mathbf{N})$，并考查 $\varliminf_{n\to\infty} E_n$.

对 $x_0\in\varliminf_{n\to\infty} E_n$，存在 N，使得

$$x_0 \in E_n, \quad |f_n(x_0)| \leqslant b_n \quad (n \geqslant N).$$

从而知 $|a_n f_n(x_0)|\leqslant 1/n\to 0(n\to\infty)$，又有

$$m([a,b]\setminus \varliminf_{n\to\infty} E_n) = m(\varlimsup_{n\to\infty}([a,b]\setminus E_n))$$

$$\leqslant \sum_{n=k}^{\infty} m([a,b]\setminus E_n) \leqslant 1/2^k \to 0 \quad (k \to \infty).$$

例 10 试证明下列命题：

(1) 设 $f: (0,\infty)\to\mathbf{R}^1$ 可测，$0<\lambda<1$. 若对任意的 $x,y>0$，有

$$f(x+y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

则 $f(x)=C$（常数）.

(2) 设 $f(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上的可测函数，则 $F(x,y)=f(y/x)$ 在 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上可测.

证明 (1) 反证法. 假定存在 $0<x_1,x_2<+\infty$，使得 $f(x_1)=a_1<f(x_2)=a_2$，我们对 $y>0$，作点集

$$E_1(y) = \{x \in (0,\infty): 0 < x < y, f(x) \leqslant a_1\},$$

$$E_2(y) = \{x \in (0,\infty): 0 < x < y, f(x) \geqslant a_2\}.$$

若 $x\in(0,x_1/2)\setminus E_1(x_1/2)$，则 $f(x_1)=a_1$ 位于 $f(x)$ 与 $f(x_1-x)$ 之间，且 $x_1-x\in E_1(x_1)$. 从而知

$$E_1(x_1) \supset E_1(x_1/2) \cup (\{x_1\} - [(0,x_1/2)\setminus E_1(x_1/2)]).$$

由此又得 $m(E_1(x_1))\geqslant x_1/2$. 由题设易知 $f(rx)=f(x)$（r 是正有理

数). 因此,对任意的 $y>0$ 以及正有理数 r: $r<y/x_1$,有 $E_1(y)\supset q\cdot E_1(x_1)$. 这说明 $m(E_1(y))\geqslant y/2$.

类似地可推出 $m(E_2(y))\geqslant y/2$. 注意到 $E_1(y)\cap E_2(y)=\varnothing$,可知只能"="号成立. 应用公式

$$m(E_1(1)\cap A)=m(A)/2 \quad (A\text{ 是}(0,1)\text{ 中任一可测集}),$$

并取 $A=E_1(1)$,导致矛盾,证毕.

(2) 不妨假定 $f(x)$ 是实值函数. 令 $g(\theta)=f(\tan\theta)(0<\theta<\pi/2)$,注意到 $\tan\theta$ 的反函数是绝对连续的(见第五章),故 $g(\theta)$ 在 $(0,\pi/2)$ 上可测. 从而 $E=\{\theta\in(0,\pi/2): g(\theta)>t\}(t\in\mathbf{R}^1)$ 是可测集. 因为点集(见周民强编的《实变函数论》§2.6)

$$\begin{aligned}&\{(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty): F(x,y)>t\}\\&\quad=\{(r\cos\theta,r\sin\theta): 0<r<+\infty,\theta\in E\}=S_E(0,\infty)\end{aligned}$$

是可测集,所以 $F(x,y)$ 在 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上是可测函数.

§3.2 可测函数列的收敛

基本内容

(一) 几乎处处收敛与一致收敛

定义 1 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是定义在点集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实值函数. 若存在 E 中的点集 Z,有 $m(Z)=0$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),x\in E\setminus Z$,则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上**几乎处处收敛**于 $f(x)$,并简记为

$$f_k(x)\to f(x),\quad \text{a.e. } x\in E.$$

引理 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数且 $m(E)<\infty$. 若 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. $x\in E$,则对任给 $\varepsilon>0$,令

$$E_k(\varepsilon)=\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\},$$

我们有

$$\lim_{j\to\infty}m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=0.$$

定理 1(**Егоров**(**叶戈罗夫**)) 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数且 $m(E)<\infty$. 若 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. $x\in E$,则对任给的 $\delta>0$,存在 E 中可测子集 E_δ,$m(E_\delta)\leqslant\delta$,使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(这一结论也称为“近乎一致收敛”.)

注意,Егоров 定理中的条件 $m(E)<\infty$ 不能去掉. 例如考虑可测函数列

$$f_n(x)=\chi_{(0,n)}(x),\quad n=1,2,\cdots,\quad x\in(0,\infty).$$

它在 $(0,\infty)$ 上处处收敛于 $f(x)\equiv1$,但在 $(0,\infty)$ 中的任一个有限测度集外均不一致收敛于 $f(x)\equiv1$.

(二) 几乎处处收敛与依测度收敛

定义 2 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数,若对任给的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上**依测度收敛**于 $f(x)$.

注意,$m(\{x\in E:|f_k(x)|=+\infty\})=0\quad(k=1,2,\cdots)$.

定理 2 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是对等的.

定理 3 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列且 $m(E)<\infty$. 若 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于几乎处处有限的函数 $f(x)$,则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

定理 4 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\delta>0$,存在 $E_\delta\subset E$ 且 $m(E_\delta)<\delta$,使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$,则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

定义 3 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列. 若对任给的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ j\to\infty}}m(\{x\in E:|f_k(x)-f_j(x)|>\varepsilon\})=0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的依测度 Cauchy(基本)列.

定理 5 若 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的依测度 Cauchy 列,则在 E 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$,使得 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

定理 6(Riesz) 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$,则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$,使得 $\lim\limits_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x)$, a.e. $x\in E$.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数列,$m(E)<\infty$,则

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in E$$

的充分且必要条件是:对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{j\to\infty} m(\{x \in E: \sup_{k\geqslant j}\{|f_k(x)|\} \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

(2) 设$\{f_n(x)\}$是$I=[0,1]$上的实值可测函数列，则下列命题等价：

(i) 存在$\{f_{n_k}(x)\}$：$\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=0$，a. e. $x\in I$.

(ii) 存在数列$\{t_n\}$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|t_n|>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n f_n(x)$在 I 上 a. e. 收敛.

(iii) 存在数列$\{t_n\}$：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n|=+\infty$，使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n f_n(x)$在 I 上几乎处处绝对收敛.

(3) 设 $f(x)$，$f_k(x)(k\in \mathbf{N})$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数. 则 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$，a. e. $x\in \mathbf{R}^1$ 的充分必要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在可测集 $E\subset \mathbf{R}^1$：$m(E)<\varepsilon$，使得对 $x\overline{\in} E$，存在 K，有

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (k > K).$$

证明 记 $S_j^{(n)}=\{x\in E: \sup\limits_{k\geqslant j}|f_k(x)|\geqslant 1/n\}$.

(1) **充分性** 依题设知，对任给 $\delta>0$，存在 $k_0\in \mathbf{N}$，使得 $m(S_{k_0}^{(n)})<\delta$. 因为对任意的 n，有

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\{x \in E: |f_k(x)| > 1/n\}$$

$$\subset \bigcup_{k=k_0}^{\infty}\{x \in E: |f_k(x)| > 1/n\} \subset S_{k_0}^{(n)}.$$

注意到 $m(S_{k_0}^{(n)})<\delta$，以及 δ 的任意性，所以 $f_k(x)$不收敛到零的点集之测度为零：

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\{x \in E: |f_k(x)| > 1/n\}\Big) = 0.$$

必要性 令 $S=\{x\in E: \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=0\}$，依题设知 $m(E\setminus S)=0$. 注意到 $S_j^{(n)}\supset S_{j+1}^{(n)}$，以及$\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} S_j^{(n)}\subset(E\setminus S)$，故得 $\lim\limits_{j\to\infty} m(S_j^{(n)})=m\Big(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} S_j^{(n)}\Big)\leqslant m(E\setminus S)=0$. 这说明对任给 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{j\to\infty} m(S_j^{(1/\varepsilon)})=0$，证毕.

(2) (i)$\Rightarrow$(ii)，(iii). 不妨就假定 $f_n(x)\to 0(n\to\infty)$，a. e. $x\in I$，则由 Егоров 定理可知，存在 $E_1\subset E_2\subset\cdots$：$m(I\setminus E_k)<1/k(k\in \mathbf{N})$，使得

$f_n(x)$在 E_k 上一致收敛于零. 从而存在指标：$n_1<n_2<\cdots$，使得$|f_n(x)|\leqslant 2^{-k}(x\in E_k, n\geqslant n_k)$. 令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，则 $m(I\setminus E)=0$. 现在取 $t_n=0(n\neq n_k)$，$t_n=1(n=n_k)$. 因此，$\sum_{n\geqslant 1}t_nf_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{n_k}(x)(x\in E)$，且有

$$|f_{n_k}(x)|<2^{-k}\quad(x\in E, k\geqslant k_0).$$

选 k_0 使 $x\in E_{k_0}$，则(ii)，(iii)皆真.

(ii)⇒(i). 依题设知，存在 $\lambda>0$，以及严格递增的自然数子列$\{n_k\}$，使得$|t_{n_k}|>\lambda(k\in\mathbf{N})$. 若$\sum_{n=1}^{\infty}t_nf_n(x)$几乎处处收敛，则有

$$\lim_{k\to\infty}t_{n_k}f_{n_k}(x)=0,\quad \lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in I.$$

(iii)⇒(i). 令 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|t_nf_n(x)|<+\infty(\text{a.e. } x\in I)$，以及 $E_k=\{x\in I: g(x)\leqslant k\}(k\in\mathbf{N})$，$E\triangleq\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，则易知 $m(I\setminus E)=0$. 我们有(参阅第四章§4.1定理7)

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|\int_{E_k}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_{E_k}g(x)\mathrm{d}x<+\infty.$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|=+\infty$，所以 $\varliminf_{n\to\infty}\int_{E_k}|f_n(x)|\mathrm{d}x=0$. 从而存在 $n_1<n_2<\cdots$，使得$\int_{E_k}|f_{n_i}(x)|\mathrm{d}x<2^{-i}$. 因此，对任意的 $k\in\mathbf{N}$，均有$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_k}|f_{n_i}(x)|\mathrm{d}x<+\infty$. 注意到 $E_{k_2}\supset E_{k_1}(k_2\geqslant k_1)$，故知$\sum_{i=1}^{\infty}f_{n_i}(x)$对 a.e. $x\in E_k$ 是收敛的. 由此又得 $\lim_{i\to\infty}f_{n_i}(x)=0$，a.e. $x\in E_k$. 也有 $f_{n_i}(x)\to 0(i\to\infty)$，a.e. $x\in E$.

(3) 只需证明充分性成立. 由题设知，对任给 $1>\varepsilon>0$，任意的 $n\in\mathbf{N}$，存在 $E_n\subset\mathbf{R}^1$：$m(E_n)<\varepsilon/2^n$，使得对 $x\overline{\in}E_n$，存在 K，有$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon/2^n(k>K)$. 令 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则 $m(E)<\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)=\varepsilon$. 因为 $x\overline{\in}E$，所以对每个 n，均存在 K，使得

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon/2^n<1/2^n\quad(k>K).$$

从而对一切 $x\in E$，均有 $f_k(x)\to f(x)(k\to\infty)$.

现在令 B 是 $f_k(x)$不收敛于 $f(x)$的点集，易知 $B\subset E, m(B)<\varepsilon$，由 ε 的任意性，可知 $m(B)=0$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集，$f_n(x)(n\in\mathbf{N})$是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $M>0, E_0\subset E$：$m(E\setminus E_0)<\varepsilon$，使得 $|f_n(x)|\leqslant M(n\in\mathbf{N}, x\in E_0)$.

(2) 设 $f(x), f_n(x)(n\in\mathbf{N})$是$(0,1)$上几乎处处有限的可测函数，则存在$\{\varepsilon_n\}$：$\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$，以及$(0,1)$上的可测函数 $F(x)$，使得

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon_n F(x),\quad \text{a.e. } x\in(0,1).$$

证明 (1) 不妨假定 E 是有界集，且 $f_n(x)(n\in\mathbf{N})$皆为实值. 因为

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in E: \sup_{n\geqslant 1}|f_n(x)|\leqslant k\},$$

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E: \sup_{n\geqslant 1}|f_n(x)|\leqslant k\})=m(E),$$

所以存在 k_0，使得 $m(\{x\in E: \sup\limits_{n\geqslant 1}|f_n(x)|\leqslant k_0\})>m(E)-\varepsilon$. 从而令

$$E_0=\{x\in E: \sup_{n\geqslant 1}|f_n(x)|\leqslant k_0\},\quad M=k_0,$$

则 $m(E\setminus E_0)<\varepsilon, |f_n(x)|\leqslant M(n\in\mathbf{N}, x\in E_0)$.

(2) 易知存在$\{a_n\}$：$a_n\to+\infty(n\to\infty)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}a_n[f_n(x)-f(x)]=0,\quad \text{a.e. } x\in(0,1).$$

从而取 $F(x)=\sup\limits_{n\geqslant 1}\{|a_n[f_n(x)-f(x)]|\}$即满足要求.

例 3 解答下列问题：

(1) 试问，Егоров 定理中的 E_δ 可以是零测集吗？

(2) 试问，Егоров 定理中，$E\setminus E_\delta$ 可以改成区间吗？

解 (1) 在 Егоров 定理中，若 $m(E_\delta)=0$，则结论不一定成立了. 例如$[0,1]$上的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1/n, & 1/n<x\leqslant 1,\\ n, & 0<x\leqslant 1/n,\\ 0, & x=0\end{cases}\quad (n\in\mathbf{N}).$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0(0\leqslant x\leqslant 1)$. 但对任意的 $E_\delta\subset[0,1]$：$m(E_\delta)=0$，均有 $\sup\{f_n(x): x\in[0,1]\setminus E_\delta\}=n$，故在$[0,1]\setminus E_\delta$ 上，$f_n(x)$不一致收敛于 0.

(2) 不可以. 例如对 $m=1,2,\cdots$,令

$$D_m = \{(2k-1)/2^m: k=1,2,\cdots,2^{m-1}\},$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x=0, x=a\in D_m, \\ f_n([a,a+1/2^n]) = [0,1/2^m], & a\in D_m, 1\leqslant m\leqslant n. \end{cases}$$

假定区间 I 满足 $|I|>1/2^{m-1}$,则 $f_n(x)\geqslant 1/2^m (n\geqslant m, x\in I)$. 若 $x>0$ 且不属于 D_m,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 m_0: $1/2^{m_0}<\varepsilon$. $x\in(a,a+1/2^{m_0})$(某个 $a\in D_{m_0}$),$f_n(x)>\varepsilon(n\geqslant m_0)$.

例 4 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x),f_1(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数,且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,a.e. $x\in[a,b]$,则存在 $E_n\subset[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$,使得

$$m\left([a,b]\Big\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0,$$

而$\{f_k(x)\}$在每个 E_n 上一致收敛于 $f(x)$.

(2) $f_n(x)$在 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上近乎一致收敛于 $f(x)$的充分必要条件是:对任给 $\delta>0$,有

$$\lim_{k\to\infty}m(E_k(\delta))=0,$$

其中
$$E_k(\delta)=\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\delta\}).$$

(3) $f_n(x)$在 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上近乎一致收敛于 $f(x)$,则 $f_n(x)$在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

(4) 设$\{f_n(x)\}$是$[0,1]$上的实值可测函数列. 若对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得

$$m(\{x\in[0,1]: |f_n(x)|<\varepsilon, n>N\})=1.$$

则存在 $E\subset[0,1]$且 $m(E)=1$,使得$\{f_n(x)\}$在 E 上一致收敛于零.

证明 (1) 令 $\varepsilon_n=1/n$,存在 $E_n\subset I\triangleq[a,b](n\in\mathbf{N})$,使得 $m(I\backslash E_n)<1/n$,$f_n(x)$在 E_n 上一致收敛于 $f(x)$. 又易知$m\left(I\Big\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$.

(2) *必要性* 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $e_\varepsilon\subset E$: $m(e_\varepsilon)<\varepsilon$,使得 $f_n(x)$在 $E\backslash e_\varepsilon$ 上一致收敛于 $f(x)$. 因此,对任给 $\delta>0$,存在 K,使得

$E_K(\delta)\subset e_\varepsilon$. 故 $m(E_K(\delta))<\varepsilon$. 这说明 $\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k(\delta))=0$.

充分性 对任给 $\varepsilon>0, k\in\mathbf{N}$, 存在 n_k, 使得 $m(E_{n_k}(1/k))<\varepsilon/2^k$. 令 $A_\varepsilon=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(1/k)$, 则 $m(A_\varepsilon)<\varepsilon$. 若 $j\geqslant n_k$, 则

$$|f_j(x)-f(x)|\leqslant 1/k \quad (\text{一切 } x\overline{\in} E_{n_k}(1/k)). \qquad (*)$$

从而当 $x\overline{\in} A_\varepsilon$ 时, 式(*)成立($j\geqslant n_k$), 即 $f_n(x)$ 在 $E\setminus A_\varepsilon$ 上一致收敛于 $f(x)$, 证毕.

(3) 证略.

(4) 对 $k\in\mathbf{N}$, 存在严格递增自然数子列$\{n_k\}$, 使得

$$m\left(\bigcup_{n=n_k+1}^{\infty}\{x\in[0,1]: |f_n(x)|<1/k\}\right)=1.$$

由此知

$$m\left(\bigcap_{n>n_k}^{\infty}\{x\in[0,1]: |f_n(x)|\geqslant 1/k\}\right)=0.$$

令 $E^c=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=n_k}^{\infty}\{x\in[0,1]: |f_n(x)|\geqslant 1/k\}$, 则 $m(E^c)=0$. 现在对任给 $\varepsilon>0$, 取 k: $1/k<\varepsilon$, 则知$f_n(x)$在 E 上一致收敛于零.

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(E)<+\infty$, $\{f_t(x)\}$是 E 上一族($0<t<+\infty$)实值可测函数. 若存在极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} f_t(x)=f(x)\ (x\in E)$, 且$F^{(n)}(x)=\sup\limits_{n\leqslant t\leqslant n+1}|f_t(x)-f(x)|$是 E 上可测函数, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $E_0\subset E$: $m(E_0)>m(E)-\varepsilon$, 使得在 E_0 上一致地存在 $\lim\limits_{t\to+\infty} f_t(x)=f(x)$.

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(E)<+\infty$. 若定义在 $E\times[0,1]$上的 $f(x,y)$满足: $f(x,y)$在 E 上(y 固定)可测; $f(x,y)$在$[0,1]$上(x 固定)连续, 则

(i) 对 ε,δ: $0<\varepsilon,\delta<1$, 点集

$$E_{\varepsilon,\delta}=\{x\in E: |f(x,y)-f(x,0)|\leqslant\varepsilon, y\leqslant\delta\}$$

是可测集.

(ii) 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $E_0\subset E$: $m(E_0)<\varepsilon$, 使得极限 $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=f(x,0)$在 E^c 上一致地成立.

证明 (1) 由题设知 $F^{(n)}(x)\to 0\ (n\to\infty, x\in E)$, 根据 Егоров 定

理，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $E_0\subset E$：$m(E_0)>m(E)-\varepsilon$，使得 $F^{(n)}(x)$在 E_0 上一致收敛于 0. 从而结论成立.

(2) 证略.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的有界函数. 则 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上几乎处处等于一个几乎处处连续的函数当且仅当存在 $Z\subset\mathbf{R}^1$：$m(Z)=0$，且 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1\backslash Z$ 上连续.

(2) 设$\{f_{m,n}(x)\}$是$[0,1]$上的双指标可测函数列，且有

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}f_{m,n}(x)=g_m(x)$，a. e. $x\in[0,1]$；

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty}g_m(x)=h(x)$，a. e. $x\in[0,1]$，

则存在子列$\{f_{m_k,n_k}(x)\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}f_{m_k,n_k}(x)=h(x)$，a. e. $x\in[0,1]$.

证明 (1) 必要性显然. 为证充分性，作函数

$$g(x)=\lim_{0<\delta\to 0}\sup\{f(y):\ y\in\mathbf{R}^1\backslash Z,|y-x|<\delta\},$$

显然 $f(x)=g(x)$，$x\in\mathbf{R}^1\backslash Z$. 对 $x\in\mathbf{R}^1\backslash Z$，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)-\varepsilon\leqslant f(y)\leqslant f(x)+\varepsilon,\quad y\in\mathbf{R}^1\backslash Z \text{ 且 } |y-x|<\delta.$$

而对 x'：$|x-x'|<\delta$，有 $y\in\mathbf{R}^1\backslash Z$ 且$|y-x|<\delta$，使得

$$|y-x'|<\delta'=\delta-|x-x'|.$$

由此知 $g(x)-\varepsilon\leqslant g(x')\leqslant g(x)+\varepsilon$.

(2) 如果题中的收敛是在 $E\subset[0,1]$上一致收敛，则存在$\{m_k\}$，$\{n_k\}$. 使得

$$|h(x)-g_{m_k}(x)|<\frac{1}{k},\quad |g_{m_k}(x)-f_{m_k,n_k}(x)|<\frac{1}{k},\quad x\in E.$$

从而有$|h(x)-f_{m_k,n_k}(x)|<2/k$，$x\in E$. 对于非一致收敛情形. 考虑用 Егоров 定理，并采用对角线法.

例 7 解答下列问题：

(1) 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的可测函数列，$f(x)$是$[a,b]$上的实值函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}m^*(\{x\in[a,b]:\ |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0,$$

试问 $f(x)$是$[a,b]$上的可测函数吗？

(2) 设 f：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$，且对任意的 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\subset\mathbf{R}^n$，$m(G)<\varepsilon$，

使得 $f\in C(\mathbf{R}^n\setminus G)$，试证明 $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

解 (1) 是的. 依题设知，对任意的 $k\in\mathbf{N}$，存在$\{n_k\}$，有

$$m^*(E_k)<1/2^k,\quad E_k=\{x\in[a,b]:|f_{n_k}(x)-f(x)|>1/2^k\}.$$

由此得 $m^*\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\right)=0$，故对 a.e. $x\in[a,b]$，有 $x\in\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}E_k^c$. 从而又知存在 N_0，当 $k\geqslant N_0$ 时，有 $x\in E_k^c$. 这说明

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|\leqslant 1/2^k,\quad \lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b],$$

故 $f(x)$在$[a,b]$上可测.

(2) 取 $\varepsilon_k=1/k$，则存在开集列$\{G_k\}$：$m(G_k)<1/k(k\in\mathbf{N})$，且 $f\in C(\mathbf{R}^n\setminus G_k)(k\in\mathbf{N})$. 令 $f_k(x)=f(x)\cdot\chi_{\mathbf{R}^n\setminus G_k}(x)$，则对任给 $\varepsilon>0$，我们有

$$\begin{aligned}&m^*(\{x\in\mathbf{R}^n:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\\&=m^*(\{x\in G_k:|f(x)|\geqslant\varepsilon\}<1/k.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$即知 $f_k(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 故 $f(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上可测.

例 8 解答下列问题：

(1) 试问：$f_n(x)=(\cos x)^n$ 在$[0,\pi]$上依测度收敛于 0 吗？又函数列

$$g_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1/n]\cup[2/n,1],\\ n, & x\in(1/n,2/n)\end{cases}$$

在$[0,1]$上依测度收敛于 0 吗？

(2) 设 $f(x),f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$是 E 上实值可测函数. 若对任给 $\varepsilon>0$，以及 $\delta>0$，存在 E 中可测子集 e 以及 K，使得 $m(E\setminus e)<\delta$，且有

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon\quad(k>K,x\in e).$$

试问这是哪种意义下的收敛？

(3) 设 $f_k(x)$在 E 上依测度收敛于 0，试问极限

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)|>0\})=0$$

成立吗？

(4) 设 $E_k(k=1,2,\cdots)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集. 试证明

(i) $\chi_{E_k}(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上依测度收敛到 0 当且仅当 $m(E_k)\to 0(k\to\infty)$；

(ii) $\chi_{E_k}(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上几乎处处收敛到 0 当且仅当 $m(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k)=0$.

解 (1) 注意$\{f_n(x)\}$,$\{g_n(x)\}$都是几乎处处收敛于0的.

(2) 依题设知,对任给$\varepsilon>0,\delta>0$,当$k>K$时,均有

$$m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})<\delta,$$

故这是依测度收敛.

(3) 不一定.例如在$[0,1]$上定义$f_k(x)=1/k(k\in\mathbf{N})$,易知$f_k(x)$在$[0,1]$上依测度收敛于0,但我们有

$$m(\{x\in[0,1]: |f_k(x)|>0\})=1.$$

(4) (i) 注意$m(\{x\in\mathbf{R}^n: \chi_{E_k}(x)>\varepsilon\})=m(E_k)$.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\chi_{E_k}(x)=0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^n$相当于x属于无穷多个E_k的全体是零测集.

例9 解答下列问题:

(1) 设在可测集$E\subset\mathbf{R}^1$上,$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$几乎处处收敛于$f(x)$,且依测度收敛于$g(x)$,试问是否有关系式

$$g(x)=f(x),\quad \text{a.e.}\ x\in E?$$

(2) 设$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数,且$m(E)<\infty$.若在$\{f_k(x)\}$的任一子列$\{f_{k_i}(x)\}$中均存在几乎处处收敛于$f(x)$的子列$\{f_{k_{i_j}}(x)\}$,试证明$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$.

(3) 设$\{f_k(x)\}$是$E\subset\mathbf{R}^1$上正值可测函数列.若$f_k(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$,试证明对$p>0$,$f_k^p(x)$在E上依测度收敛于$f^p(x)$.

(4) 设$E\subset\mathbf{R}^1$上可测函数列$\{f_k(x)\}$满足

$$f_k(x)\geqslant f_{k+1}(x)\quad(k=1,2,\cdots).$$

若$f_k(x)$在E上依测度收敛到0,试问$f_k(x)$在E上是否几乎处处收敛于0?

证明 (1) 是的.依题设知,存在$\{n_k\}$,使得$f_{n_k}(x)$在E上几乎处处收敛于$g(x)$.从而有关系:$g(x)=f(x)$, a. e. $x\in E$.

(2) 反证法.假定$f_k(x)$在E上不是依测度收敛于$f(x)$的,则存在$\varepsilon_0>0,\sigma_0>0$以及$\{k_i\}$,使得

$$m(\{x\in E: |f_{k_i}(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})\geqslant\sigma_0.\qquad(*)$$

但依题设知存在$\{k_{i_j}\}$,使得

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_{i_j}}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

由此又知 $f_{k_{i_j}}(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，而这与(*)式矛盾. 证毕.

(3) 由题设知，对任何子列$\{f_{k_i}(x)\}$，必存在$\{k_{i_j}\}$，使得 $f_{k_{i_j}}(x)$在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 也就是说，对任何子列$\{f^p_{k_i}(x)\}$，总存在子列$\{f^p_{k_{i_j}}(x)\}$，它几乎处处收敛于 $f^p(x)$. 从而根据(2)，易知结论成立.

(4) 依题设知，存在$\{k_i\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in E,$$

从而根据 $f_k(x) \geqslant f_{k+1}(x)(k \in \mathbf{N})$，即知

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

例 10 试证明下列命题：

(1) 设$\{E_k\} \subset \mathbf{R}^n$ 是可测集合列，则$\{\chi_{E_k}(x)\}$是依测度 Cauchy 列的充分必要条件是：$\lim\limits_{k,j\to\infty} m(E_k \triangle E_j) = 0$.

(2) 设 $m(E) < \infty$，$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是 E 上几乎处处有限的可测函数，则$\{f_k(x)\}$在 E 上依测度收敛于$f(x)$的充分且必要条件是：

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{\alpha>0} \{\alpha + m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} = 0.$$

证明 (1) 注意，对任给 ε: $1 > \varepsilon > 0$，点集$|\chi_{E_k}(x) - \chi_{E_j}(x)| > \varepsilon$ 就是 $E_k \setminus E_j$ 与 $E_j \setminus E_k$ 的并集.

(2) **必要性** 依题设知，对任给 $\varepsilon > 0$，$\alpha < \varepsilon/2$，存在 N，使得

$$m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \alpha\}) < \varepsilon/2 \quad (k \geqslant N).$$

从而得 $\alpha + m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \alpha\}) < \varepsilon (k \geqslant N)$. 对 α 取下确界更成立，再令 $k \to \infty$也然. 由此即得所证.

充分性 记 $E_k(\alpha) = \{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \alpha\}$，由假设知，对任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $k \geqslant N$ 时有 $\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha + m(E_k(\alpha))\} < \varepsilon$. 从而对每个 k: $k \geqslant N$，可取 $\alpha_k > 0$，使得 $\alpha_k + m(E_k(\alpha_k)) < \varepsilon$. 自然有 $\alpha_k < \varepsilon (k \geqslant N)$. 现在令 $\alpha_\varepsilon = \sup\limits_{k\geqslant N}\{\alpha_k\}$，则 $\alpha_\varepsilon \leqslant \varepsilon (k \geqslant N)$. 因此，对任给 $\varepsilon > 0$，$0 < \delta < \varepsilon$，存在 N，使得

$$m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \delta\}) < \varepsilon \quad (k \geqslant N).$$

这说明 $f_k(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

例 11 试证明下列命题：

(1) 若$\{f_n(x)\}$是 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上依测度收敛列，且有

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant M|x' - x''|, \quad x',x'' \in E,$$

则$\{f_n(x)\}$是 E 上几乎处处收敛列.

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(E)<+\infty$，$\{f_n(x)\}$是 E 上实值可测函数列，则 $f_n(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} = 0, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

证明 (1) 由依测度收敛知，对 $\varepsilon>0,\sigma>0$，存在 N，使得

$$m(\{x \in E: |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon/3\}) < \sigma \quad (n,m \geqslant N).$$

假定 $x_0\in E$ 满足：

$$m(E \cap (x_0 - \varepsilon/3M, x_0 + \varepsilon/3M)) = 2\sigma > 0.$$

从而知存在点 $x_{n,m}\in E\cap(x_0-\varepsilon/3M, x_0+\varepsilon/3M)$，以及 n_i, m_i，使得 $|f_{n_i}(x_{n,m})-f_{m_i}(x_{n,m})|<\varepsilon/3$. 因此，当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\begin{aligned}|f_n(x_0) - f_m(x_0) &\leqslant |f_n(x_0) - f_{n_i}(x_{n,m})| \\ &\quad + |f_{n_i}(x_{n,m}) - f_{m_i}(x_{n,m})| \\ &\quad + |f_{m_i}(x_{n,m}) - f_m(x_0)| \\ &< 2M|x_0 - x_{n,m}| + \varepsilon/3 \\ &< 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $f_n(x)$在 $x=x_0$ 处收敛.

若对 $x_0\in E$，存在 $\delta_0>0$，使得 $m(E\cap(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0))=0$，则 $f_n(x)$不一定在 $x=x_0$ 处收敛. 由此易知命题结论成立.

(2) **必要性** 依题设知，对任给 $\varepsilon>0,\sigma>0$，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时有 $m(\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})<\sigma$. 因为在点 $x\in E$ 满足 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 时，必有 $0\leqslant F_n(x)<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=0$, a.e. $x\in E$.

充分性 由题设知，对任给 $\delta>0,\varepsilon>0$，存在 $E_\delta\subset E$ 以及 N，使得

$$m(E\setminus E_\delta) < \delta, \quad |F_n(x)| < \varepsilon \ (n \geqslant N, x \in E_\delta).$$

由此易知 $f_n(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

例 12 试证明下列命题：

(1) 设 $F(x), f_n(x)(n\in\mathbf{N})$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的可测函数，且有 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$，a.e. $x\in\mathbf{R}^1$；又对任给 $\varepsilon>0$，均有

$$m(\{x\in\mathbf{R}^1: F(x)>\varepsilon\})<+\infty.$$

若 $f_n(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上几乎处处收敛于 0，则 $f_n(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上依测度收敛于 0.

(2) 设有定义在 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上的可测函数列：$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$. 若 $f_n(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，则 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

(3) 设 $f_n(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数 $(n=1,2,\cdots)$，且 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$，则在 $f(x)$ 的连续点 $x=x_0$ 上，必有

$$f_n(x_0)\to f(x_0)\quad(n\to\infty).$$

证明 (1) 注意 $\{x\in\mathbf{R}^1: |f_n(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in\mathbf{R}^1: F(x)>\varepsilon\}$，因此，其推理可在有穷测度点集上进行.

(2) 依题设知，存在 $\{n_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in E.$$

从而根据 $\{f_n(x)\}$ 的渐升性，立即可知结论成立.

(3) 反证法. 假定 $f_n(x_0)$ 当 $n\to\infty$ 时不收敛于 $f(x_0)$，则存在 $\varepsilon_0>0$，以及 $\{f_{n_k}(x_0)\}$，使得

$$f_{n_k}(x_0)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0\quad 或\quad f_{n_k}(x_0)\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0.$$

若前一情形成立，则由 x_0 是 f 的连续点可知，存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon_0/2\quad(x_0\leqslant x<x_0+\delta).$$

由于 $f_{n_k}(x)\geqslant f_{n_k}(x_0)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0>f(x)$，故得

$$m(\{x\in[0,1]: f_{n_k}(x)>f(x)\})\geqslant\delta\quad(k\in\mathbf{N}).$$

但这与 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$ 矛盾.

对后一种情形，证略.

例 13 试证明下列命题：

(1) 设 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上依测度收敛于 $f(x)$，$\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $g(x)$. 则 $\{f_k(x)+g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)+g(x)$.

(2) 设 $m(E)<\infty$，$\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，$\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $g(x)$，则 $\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于

$f(x)\cdot g(x)$. 若 $m(E)=+\infty$,则结论不一定真.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若$\{f_k(x)\}$在 E 上依测度收敛于 0,$\{g_k(x)\}$在 E 上依测度收敛于 0,则$\{f_k(x)g_k(x)\}$在 E 上依测度收敛于 0.

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m(E)<+\infty$. 若 $f_k(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$,且 $f(x)\neq 0$,$f_k(x)\neq 0$,a. e. $x\in E(k\in\mathbf{N})$,则 $1/f_k(x)$在 E 上依测度收敛于 $1/f(x)$.

证明 (1) 注意包含关系:

$$\{x\in E:|(f_k(x)+g_k(x))-(f(x)+g(x))|>\sigma\}$$
$$\subset\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\sigma/2\}$$
$$\cup\{x\in E:|g_k(x)-g(x)|>\sigma/2\}.$$

(2) 对任一子列$\{f_{k_i}(x)g_{k_i}(x)\}$,由题设知,存在 $f_{k_{i_j}}(x)$在 E 上 a.e.收敛于 $f(x)$,也存在 $g_{k_{i_{j_l}}}(x)$在 E 上 a. e. 收敛于 $g(x)$. 从而知 $f_{k_{i_{j_l}}}(x)g_{k_{i_{j_l}}}(x)$在 E 上 a. e. 收敛于 $f(x)g(x)$. 这说明命题结论成立.

在 $m(E)=+\infty$时,举例如下:设 $E=[0,\infty)$,作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,n),\\ 1/x, & x\in[n,\infty),\end{cases}$$
$$g_n(x)=x\ (n\in\mathbf{N}),$$

则 $f_n(x)$,$g_n(x)$在 E 上各依测度收敛于 $f(x)\equiv 0$,$g(x)\equiv x$. 然而 $[f_n(x)+g_n(x)]^2$ 并不依测度收敛于$[f(x)+g(x)]^2$,$f_n(x)g_n(x)$在 E 上也不依测度收敛于 $f(x)g(x)=0$,这是因为$\{x\in E:|f_n(x)g_n(x)|\geqslant 1\}=[n,\infty)$.

(3) 注意下述包含关系:(对 $\varepsilon>0$)

$$\{x\in E:|f_k(x)g_k(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset\{x\in E:|f_k(x)|\geqslant\sqrt{\varepsilon}\}$$
$$\cup\{x\in E:|g_k(x)|\geqslant\sqrt{\varepsilon}\}.$$

(4) 不妨假定 $f_k(x)(k\in\mathbf{N})$与 $f(x)$皆不为 0. 依题设知,对任一子列$\{f_{k_i}(x)\}$,均存在子列$\{f_{k_{i_j}}(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$. 也就是说,对任一子列$\{1/f_{k_i}(x)\}$,均存在子列$\{1/f_{k_{i_j}}(x)\}$几乎处处收敛于 $1/f(x)$. 这说明命题结论成立.

§ 3.3 可测函数与连续函数的关系

基本内容

定理(Лузин(卢津)) 若 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数,则对任给的 $\delta>0$,存在 E 中的闭集F,$m(E\setminus F)<\delta$,使得 $f(x)$是 F 上的连续函数.

推论 1 若 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数,则对任给的 $\delta>0$,存在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个连续函数 $g(x)$,使得

$$m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})<\delta;$$

若 E 还是有界集,则可使上述 $g(x)$具有紧支集.

推论 2 若 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数,则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数列$\{g_k(x)\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in E.$$

注 我们知道,$\mathbf{R}^1$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

可以表为(双重指标)连续函数列的累次极限:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}[\cos(n!2\pi x)]^{2k}=f(x),\quad x\in\mathbf{R}^1.$$

然而并不存在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数列$\{g_k(x)\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R}^1.$$

典型例题精解

例 1 解答下列问题:

(1) 试作定义在[0,1]上的实值可测函数 $f(x)$,对于[0,1]中的任一零测集 Z,$f(x)$均不在$[0,1]\setminus Z$ 上连续.

(2) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数,试问是否存在 $g\in C(\mathbf{R}^1)$,使得

$$m(\{x\in\mathbf{R}^1: |f(x)-g(x)|>0\})=0?$$

解 (1) 在[0,1]中作类 Cantor 集 H: $m(H)=1/2$,令函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in H,\\ -1, & x\in[0,1]\setminus H,\end{cases}$$

易知$([0,1]\setminus Z)\cap H\neq\varnothing$,故知对任意的 $x_0\in([0,1]\setminus Z)\cap H$,在$(x_0-$

$\delta, x_0+\delta)$内总有$[0,1]\backslash(Z\cup H)$之点. 这说明$f(x)$在$x=x_0$处不连续.

(2) 不一定. 例如$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[0,1/2),\\ +1, & x\in[1/2,1].\end{cases}$则对任意的$g\in C([0,1])$: $g(1/2)=\lambda>0$, 存在$\delta_0>0$, 使得当$x\in(1/2-\delta_0, 1/2+\delta_0)$时, $g(x)>\lambda/2$. 类似地讨论$\lambda<0, \lambda=0$, 即可得证.

例 2 试证明下列命题:

(1) 若$f(x)$是$\mathbf{R}^1$上的实值可测函数, 且有

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad (x,y\in\mathbf{R}^1),$$

则$f(x)$是连续函数.

(2) 设$f(x)$是$I=(a,b)$上的实值可测函数. 若$f(x)$具有中值(下)凸性质:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x,y\in I,$$

则$f\in C(I)$.

证明 (1) 因为$f(x+h)-f(x)=f(h)$以及$f(0)=0$, 所以只需证明$f(x)$在$x=0$处连续即可. 根据 Лузин 定理, 可作有界闭集F: $m(F)>0$, 使$f(x)$在F上(一致)连续, 即对任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta_1>0$, 有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon, \quad |x-y|<\delta_1, \quad x,y\in F.$$

现在研究$F-F$, 由第二章 § 2.4 定理 2 知道, 存在$\delta_2>0$, 使得

$$F-F\supset[-\delta_2,\delta_2].$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当$z\in[-\delta,\delta]$时, 由于存在$x$, $y\in F$, 使得$z=x-y$, 故可得

$$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

这说明$f(x)$在$x=0$处是连续的.

(2) 根据数学分析的理论可知, 如果$f(x)$是I上的有界函数, 那么$f\in C(I)$.

对此, 假定$f(x)$在$x=x_0\in I$处附近无界, 且考查区间$[x_0-2\delta, x_0+2\delta]\subset I$, 其中存在$\{\xi_k\}$:

$$\xi_k\in(x_0-\delta, x_0+\delta), \quad f(\xi_k)\geqslant k \quad (k=1,2,\cdots).$$

对于任意的$x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta)$, 显然有

$$x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta, \; x_0-2\delta\leqslant x'\triangleq 2\xi_k-x\leqslant x_0+2\delta.$$

由 $2\xi_k=x'+x$，可知 $2f(\xi_k)\leqslant f(x)+f(x')$. 从而必有 $f(x)\geqslant k$ 或者 $f(x')\geqslant k$. 这说明

$$m(\{x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta):f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

也就是说，对于任意大的自然数 k，均有

$$m(\{x_0-2\delta\leqslant x\leqslant x_0+2\delta:f(x)\geqslant k\})\geqslant\delta.$$

从而导致 $f(x_0)=+\infty$，矛盾. 即得所证.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测，则存在多项式列 $\{P_n(x)\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$, a. e. $x\in[a,b]$.

(2) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数，则存在 $f_n\in C([0,1])(n\in\mathbf{N})$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(0\leqslant x\leqslant1)$.

证明 (1) 根据 Лузин 定理，对任意的 $n\in\mathbf{N}$，存在闭集 $F_n\subset[a,b]$ $(n\in\mathbf{N})$，使得 $F_n\subset F_{n+1}$, $m([a,b]\setminus F_n)<1/n$，且 $f\in C(F_n)(n\in\mathbf{N})$. 从而知存在 $g\in C([a,b])$，使得 $g(x)=f(x)(x\in F_n,n\in\mathbf{N})$. 由此又知存在多项式 $P_n(x)$，使得

$$|g(x)-P_n(x)|<1/n\quad(n\in\mathbf{N},\ x\in[a,b]),$$

即 $|f(x)-P_n(x)|<1/n(x\in F_n,n\in\mathbf{N})$.

令 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则 $m([a,b]\setminus F)=0$. 对 $x_0\in F$，则存在 n_0, $x_0\in F_n(n\geqslant n_0)$. 从而对任给 $\varepsilon>0$，取 $n_1>n_0$，且 $1/n_1<\varepsilon$，则有

$$|f(x_0)-P_n(x_0)|<1/n<\varepsilon\quad(n>n_1),$$

即得所证.

(2) 不妨假定 $f(0)=0, f(1)=1$. 作函数 $(n\in\mathbf{N})$

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k}{n}\chi_{f^{-1}(k/n,(k+1)/n]}(x)+\frac{n-1}{n}\chi_{f^{-1}(((n-1)/n,1])}(x),$$

则 $\max\limits_{[0,1]}|g_n(x)-f(x)|\leqslant1/n(n\in\mathbf{N})$. 而由

$$\begin{aligned}|g_{2^{k+1}}(x)-g_{2^k}(x)|&\leqslant|g_{2^{k+1}}(x)-f(x)|\\&\quad+|g_{2^k}(x)-f(x)|\leqslant1/2^{k-1},\end{aligned}$$

可知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[g_{2^{k+1}}(x)-g_{2^k}(x)]=f(x)-g_2(x)$ 是连续列的点极限.

例 4 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的实值可测函数，则存在数列 $\{h_n\}$：$h_n \to 0$ $(n\to\infty)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x+h_n) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in (0,1).$$

(2) 设 $E\subset \mathbf{R}^1$ 是可测集，$f: E\to \mathbf{R}^1$. 若存在 $M>0$，使得对任意的 $x\in E$，都有 $\delta>0$，以及

$$|f(y)-f(x)| < M(y-x), \quad y\in E\cap(x,x+\delta),$$

则 $m^*(f(E))\leqslant M\cdot m(E)$.

(3) 设 $f(x), f_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^1(m(E)<\infty)$ 上正实值可测函数，且有 $\overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x) = f(x)(x\in E)$，则对任给 $\delta>0$，存在 $A\subset E$ 以及 k_0，$m(A)<\delta$，使得

$$f_k(x)\leqslant f(x)+\delta \quad (x\in E\setminus A, k>k_0).$$

证明 (1) 根据 Лузин 定理，可作闭集 $F_n\subset(0,1)$：$m(F_n)>1-1/n^2$，$f(x)$ 在 F_n 上连续，从而有 $\eta_n\to 0(n\to\infty)$，使得

$$|f(x+h)-f(x)|<1/n, \quad x,x+h\in F_n,\ |h|<\eta_n.$$

取 h_n：$|h_n|<\eta_n(n\in\mathbf{N})$. 易知 $m(\{x\in F_n: x+h\overline{\in} F_n\})<1/n^2(n\in\mathbf{N})$. 由此知存在 $E_n\subset F_n$，$m(E_n)>1-2/n^2$，使得

$$|f(x+h_n)-f(x)|<1/n, \quad x\in E_n.$$

再考查 $\{E_n\}$ 的下限集，$m(\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n)=1$，即得所证.

(2) 令 $S_n=\{x\in E: |f(y)-f(x)|\leqslant M(y-x)$，一切 $y\in E\cap(x,x+1/n)\}$，注意到 $x\in\overline{S_n}\cap E$ 是单调列 $\{x_n\}\subset S_n(n\in\mathbf{N})$：$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$，$\overline{S_n}\cap E=S_n$，故 S_n 是可测集. 显然有

$$S_1\subset S_2\subset\cdots, \quad \bigcup_{n\geqslant 1} S_n = E.$$

记 $E_1=S_1, E_2=S_2\setminus S_1,\cdots$，因为

$$m^*(f(E)) = m^*\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} f(E_n)\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} m^*(f(E_n)),$$

以及 $m(E)=\sum_{n\geqslant 1} m(E_n)$，所以只需指出

$$m^*(f(E_n))\leqslant M\cdot m(E_n) \quad (n\in\mathbf{N}).$$

换句话说，我们可以假定

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x| \quad (x\in E, y\in E\cap(x,x+1/n)),$$

而分解 E 为 $E_n(n\in\mathbf{N})$之并，E_n 的直径小于 $1/n$. 从而不妨设 E 的直径小于 $1/n$，$|f(y)-f(x)|\leqslant M|x-y|(x,y\in E)$.

对任给 $\varepsilon>0$，取开集 G：$G\supset E$，$m(G)\leqslant m(E)+\varepsilon$，且令 $I_k(k\in\mathbf{N})$ 是 G 的构成区间，我们有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|x-y|\leqslant M\cdot|I_k| \quad (x,y\in E\cap I_k).$$

因此，$f(E\cap I_k)$含于一闭区间中长度至多为 $M\cdot|I_k|$. 从而

$$m^*(f(E\cap I_k))\leqslant M\cdot|I_k|,$$

$$m^*(f(E))\leqslant\sum_{k\geqslant 1}m^*(f(E\cap I_k))\leqslant M\cdot m(G)\leqslant M\cdot m(E)+\varepsilon.$$

即得所证.

(3) 令 $g_k(x)=\sup\limits_{i\geqslant k}\{f_i(x)-f(x)\}(x\in E)$，$E_k=\{x\in E:\ f_k(x)>f(x)+\delta\}$，$G_k=\bigcup\limits_{i\geqslant k}E_i(k\in\mathbf{N})$，易知 $G_k=\{x\in E:\ g_k(x)>\delta\}$. 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=0(x\in E)$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}m(G_k)=0$. 注意到 $G_k\supset G_{k+1}(k\in\mathbf{N})$，$m(E)<+\infty$，我们有

$$m(\{x\in E:\ \lim_{k\to\infty}g_k(x)>\delta\})=m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\Big)$$

$$=\lim_{k\to\infty}m(G_k)=0.$$

因此，取 n_0，使 $m(G_{n_0})<\delta$，并令 $A=G_{n_0}$即可得证.

§3.4 复合函数的可测性

基本内容

为了讨论可测函数复合运算的可测性问题，我们首先用点集映射的观点把函数可测性的定义改述一下. 大家知道，对于实值函数 $f(x)$来说，点集$\{x:\ f(x)>t\}$与 $f^{-1}((t,\infty))$是一致的，我们有下述结论：

引理 若 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数，则 $f(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上可测的充分且必要条件是：对于 $\mathbf{R}^1$ 中的任一开集 G，$f^{-1}(G)$是可测集.

定理 1 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，$g(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数，则复合函数 $h(x)=f[g(x)]$是 $\mathbf{R}^1$ 上的可测函数.

定理 2 设 T：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是连续变换，当 $Z\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m(Z)=0$ 时，$T^{-1}(Z)$是零测

集.若 $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的实值可测函数,则 $f(T(x))$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

推论 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 的实值可测函数,T: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是非奇异线性变换,则 $f(T(x))$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

典型例题精解

例 1 解答下列问题:

(1) 令(斜坡函数)

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}-n, & x\leqslant -n,\\ x, & -n<x<n,\\ n, & n\leqslant x\end{cases}\quad (n\in\mathbf{N}).$$

并设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数,若对一切 n,$\psi_n(x)=\varphi_n[f(x)]$在 $\mathbf{R}^1$ 上连续,试证明 $f\in C(\mathbf{R}^1)$.

(2) 试作 $g\in C(\mathbf{R}^1)$,$f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可测,但 $f[g(x)]$不是可测函数.

(3) 设 $f(x)$在 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上可测,试证明对 $\mathbf{R}^1$ 中任一闭集 F,$f^{-1}(F)$是可测集.

(4) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可测,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,$g(x)$在$[m,M]$上单调,试证明 $g[f(x)]$在$[a,b]$上可测.

解 (1) 只需指出:对任一区间(a,b),$f^{-1}((a,b))$是开集.我们取 n: $n>\max\{|a|,|b|\}$,易知

$$\varphi_n^{-1}((a,b))=(a,b),$$

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}[\varphi_n^{-1}((a,b))]=\psi_n^{-1}((a,b)).$$

(2) 设 $\Phi(x)$是$[0,1]$上的 Cantor 函数,令

$$\Psi(x)=\frac{x+\Phi(x)}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

则 $\Psi(x)$是$[0,1]$上的严格单调上升的连续函数.记 C 是$[0,1]$中的 Cantor 集,W 是 $\Psi(C)$中的不可测子集.

现在令 $f(x)$是点集 $\Psi^{-1}(W)$上的特征函数,作

$$g(x)=\Psi^{-1}(x),\quad x\in[0,1].$$

显然,$f(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$, $g(x)$是$[0,1]$上的严格单调上升的连续函数.易知 $f[g(x)]$在$[0,1]$上不是可测函数.

(3) 注意$(f^{-1}(F))^c=f^{-1}(F^c)$.

(4) 证略.

例 2 试证明下列命题:

(1) 若 $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数,则 $f(x-y)$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

(2) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$,$g(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的可测函数.若对任意的零测集 Z,$f^{-1}(Z)$是可测集,则 $g[f(x)]$是可测函数.

(3) 设 $z=f(u,v)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数,$g_1(x)$,$g_2(x)$是 $I=[a,b]\subset\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数,则 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$是$[a,b]$上的可测函数.

(4) 设 $f(x)$是定义在$(0,1]$上的实值函数,则必存在可测函数 $g(x)$与 $h(x)$,使得

$$f(x)=g[h(x)],\quad x\in(0,1].$$

证明 (1) (i) 记 $F(x,y)=f(x)$ $((x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$,则因为对于 $t\in\mathbf{R}^1$,有

$$\{(x,y):F(x,y)>t\}=\{(x,y):f(x)>t,\ y\in\mathbf{R}^n\},$$

所以 $F(x,y)$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

(ii) 作 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 的非奇异线性变换 T:

$$\begin{cases}x=\xi-\eta,\\ y=\xi+\eta,\end{cases}\quad(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,$$

易知在变换 T 下,$F(x,y)$变为 $F(\xi-\eta,\xi+\eta)=f(\xi-\eta)$,从而$f(\xi-\eta)$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

(2) 设 $G\subset\mathbf{R}^1$ 是开集,则 $(g\circ f)^{-1}(G)=f^{-1}[g^{-1}(G)]$. 因为 $g^{-1}(G)$是可测集,所以存在零测集 Z_1,Z_2,以及 Borel 集 H,使得

$$g^{-1}(G)=(H\setminus Z_1)\cup Z_2,\quad Z_1\subset H,H\cap Z_2=\varnothing.$$

从而我们有 $f^{-1}[g^{-1}(G)]=(f^{-1}(H)\setminus f^{-1}(Z_1))\cup f^{-1}(Z_2)$. 注意到 $f(x)$的连续性,可知 $f^{-1}(H)$是 Borel 集. 又由 $f^{-1}(Z_1)$,$f^{-1}(Z_2)$是可测集,可知 $f^{-1}[g^{-1}(G)]$是可测集,即得所证.

(3) 对任意 $t\in\mathbf{R}^1$,令 $G_t=\{(u,v):F(u,v)>t\}=F^{-1}((t,\infty))$,则

$$\{x\in I:F(x)>t\}=\{x\in I:(f(x),g(x))\in G_t\}.$$

若 G_t 是开矩形:$G_t=(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)$,则

$$\{x\in I: F(x)>t\} = \{x\in I: g_1(x)\in(a_1,b_1), g_2(x)\in(c_1,d_1)\}$$
$$= \{x\in I: g_1(x)\in(a_1,b_1)\}\cap\{x\in I: g_2(x)\in(c_1,d_1)\}.$$

对开集 G_t，将其分解为可数个开矩形之并集：$G_t=\bigcup_{n\geqslant 1} J_n$，$J_n=(a_n,b_n)\times(c_n,d_n)$，我们有

$$\{x\in I: F(x)>t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x\in I: f(x)\in(a_n,b_n)\}$$
$$\cap\{x\in I: g(x)\in(c_n,d_n)\}).$$

由此知 $F(x)$在 I 上可测.

(4) 把$(0,1]$中的点作二进位无尽小数表示：$x\in(0,1]$，

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},\quad a_n=\begin{cases}0,\\1,\end{cases}$$

并定义

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n},\quad h(0)=0,$$

则 $h(x)$在$(0,1]$上严格递增. 易知 $h((0,1])$是 Cantor 集的子集，$m(h((0,1]))=0$.

现在，再定义函数

$$g(x)=\begin{cases}f(h^{-1}(x)), & x\in h((0,1]),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $f(x)=g(h(x))$，其中 $g(x)$，$h(x)$是$(0,1]$上的 L-可测函数.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数，$F(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数. 若有

$$|f(x+y)|\leqslant F(f(x),f(y)),\quad x,y\in\mathbf{R}^1,$$

则 $f(x)$在有界集上是有界函数.

(2) 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上的实值函数，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{R}^1$ 上可测函数 $g(x)$和点集 H：$H\subset E$，使得

$$m^*(E)=m^*(H),\quad |f(x)-g(x)|<\varepsilon,\quad x\in H.$$

证明 (1) 令 $g(x)=|f(x)|+|f(-x)|$并作 $E\subset\mathbf{R}^1$，$m(E)>0$，使 $g(x)$在 E 上有界. 从而由题设知当 $x,y\in E$ 时，$f(x-y)$是有界的. 因为 $E-E\supset B(0,\delta)$，所以 $f(x)$在 $B(0,\delta)$上有界. 故对 $z\in B(0,\delta)$，

$f(nz)$有界.

(2) (i) 对 $f(E)$是可数集的情形,即 $f(E)=\{y_1,y_2,\cdots\}$时,令 $E_n=\{x\in E: f(x)=y_n\}$,则 $E=\bigcup_{n\geqslant 1}E_n$. 此时作 $A_1\supset E_1$: $m(A_1)=m^*(E_1)$,又作 $A_2\supset E_2\setminus A_1$, $m(A_2)=m^*(E_2\setminus A_1)$,且有 $m(A_1\cap A_2)=0$, $\cdots$,我们有$\{A_n\}$:

$$A_n\supset E_n\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k\right),\quad m(A_n)=m^*\left(E_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k\right),$$
$$m(A_k\cap A_n)=0\quad(k=1,2,\cdots,n-1).$$

现在记 $H=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap A_n)$,则存在可测集 S: $S\supset H$, $m(S)=m^*(H)$. 此时,$E_n\subset A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,我们有

$$E_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\subset E\cap A_n\subset A_n\cap S\quad(n=2,3,\cdots),$$
$$m(A_n\cap S)\geqslant m^*\left(E_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)=m(A_n),$$
$$m(A_n\setminus S)=0,\quad m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\setminus S\right)=0.$$

此外,$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset S\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\setminus S\right)$,可知

$$m^*(E)=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant m(S)=m^*(H).$$

但 $H\subset E$,故 $m^*(E)=m^*(H)$. 作函数

$$g(x)=\begin{cases}y_n, & x\in A_n\quad(n\in\mathbf{N}),\\ 0, & x\in\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c,\end{cases}$$

则 $g(x)$可测,且 $g(x)=f(x)(x\in H)$.

(ii) 对一般情形的 $f(x)$,对任意的 $\varepsilon>0$,作 $g(x)=\varepsilon[f(x)/\varepsilon](x\in E)$,易知 $0\leqslant f(x)-g(x)\leqslant\varepsilon$, 且 $g(E)$可数. 再用(i).

例 4 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x),f_n(x)(n\in\mathbf{N})$在 $\mathbf{R}^1$ 上可测,$g\in C(\mathbf{R}^1)$,若 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, a. e. $x\in\mathbf{R}^1$,则 $\lim_{n\to\infty}g[f_n(x)]=g[f(x)]$, a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(2) 设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$，且 $g\in C(\mathbf{R}^1)$，则 $g[f_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $g[f(x)]$.

证明 (1) 依题设可知，存在 $Z\subset\mathbf{R}^1$：$m(Z)=0$，使得 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty,x\in\mathbf{R}^1\setminus Z)$. 因为 $g\in C(\mathbf{R}^1)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}g[f_n(x)]=g[f(x)]$ $(x\in\mathbf{R}^1\setminus Z)$，即得所证.

(2) 首先，易知 $g[f(x)]$，$g[f_n(x)](n\in\mathbf{N})$ 皆为可测函数. 其次，对任一子列 $\{g[f_{k_i}(x)]\}$，由题设知 $f_{k_i}(x)$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$，故存在子列 $f_{k_{i_j}}(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 由此知，$g[f_{k_{i_j}}(x)]$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $g[f(x)]$. 这说明命题结论成立.

§3.5 等可测函数

基本内容

定义 考查定义在区间 I 上的两个可测函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，若对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$，有

$$m(\{x\in I:f(x)\geqslant t\})=m(\{x\in I:g(x)\geqslant t\}),$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为**等可测函数**. 当然，两个等可测函数不一定是同一个函数. 若对任意 $t\in\mathbf{R}^1$，有 $F(t)=m(\{x\in I:f(x)<t\})<+\infty$，则称 $F(t)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的**分布函数**.

定理 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $I=(0,1)$ 上等测. 若 $f(x)$，$g(x)$ 是递减左连续函数，则 $f(x)=g(x)$，$x\in I=(0,1)$.

注 称有相同分布函数者为等可测函数. 分布函数自身是左连续的.

典型例题精解

例 1 解答下列问题：

(1) 求下列函数在 $[0,2\pi]$ 上的分布函数 $F(t)$：

(i) $\sin x$； (ii) $\sin(3x/2)$； (iii) $\sin(2x-\pi/4)$； (iv) $\cos x$.

(2) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可测函数，记 $F(t)$ 为其分布函数. 求下列函数在 $[0,1]$ 上的分布函数：

(i) $f(x)+c$； (ii) $cf(x)(c>0)$； (iii) $f^3(x)$.

(3) 试问 $\sin x$ 与 $\sin(nx+\alpha)(n\in\mathbf{N},\alpha\in\mathbf{R}^1)$ 在

(i) $[0,2\pi]$；　　(ii) $[0,\pi]$

上是等可测函数吗？

(4) 设 $f(x)$是(a,b)上的可测函数，试问何时其分布函数 $F(t)$在 $t_0\in(a,b)$处连续？

解　(1) (i),(ii),(iii)分布函数均为：

$$F(t)=\begin{cases}\pi+2\arcsin t, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & t<-1,\\ 2\pi, & t>1.\end{cases}$$

(2) (i) $F(t-c)$；(ii) $F(t/c)$；(iii) $F(\sqrt[3]{t})$.

(3) (i) 是；(ii) 不是.

(4) $F(t)$在 $x_0\in(a,b)$上连续当且仅当

$$m(\{x\in(a,b):f(x)=t_0\})=0.$$

例 2　试证明下列命题：

(1) 设有数列$\{\theta_n\}$,$\{p_n\}$：$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=+\infty$，且令

$$f_n(x)=|\sin(nx+\theta_n)|^{p_n}\quad(x\in(0,2\pi)),$$

则 $f_n(x)$在$(0,2\pi)$上依测度收敛于 0.

(2) 试作 $I=[0,4\pi]$上的递减函数 $g(x)$，使得对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$，有

$$m(\{x\in I:\sin x>t\})=m(\{x\in I:g(x)>t\}).$$

证明　(1) 因为$|\sin(nx+\theta_n)|$与$|\sin x|$等可测，所以

$$m(\{x\in(0,2\pi):|\sin(nx+\theta_n)|^{p_n}>t\}$$
$$=m(\{x\in(0,2\pi):|\sin x|>t^{1/p_n}\})\to 0\quad(n\to\infty).$$

(2) 令 $E_t=\{x\in I:\sin x>t\}$，$f(t)=m(E_t)$，则 $f(t)$递减，且有 $f([-1,1])=f(\mathbf{R}^1)=[0,4\pi]$，$f(t)$在$[-1,1]$上是一一映射. 现在令 $g=f^{-1}$，则 $g(x)$在$[0,4\pi]$上递减，且 $g(x)>t$ 当且仅当 $x<f(t)$.

例 3　解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，定义

$$f^*(\tau)=\inf\{t\in\mathbf{R}^1:m(\{x\in\mathbf{R}^1:f(x)>t\})\leqslant\tau\}$$
$$(0\leqslant\tau\leqslant m(E)),$$

称 f^* 为 f 的非升重排(函数)，试证明 f 与 f^* 是等可测的.

(2) 试求下列函数在指定区间上的非升重排：

(i) $\sin x, x\in[0,2\pi]$;　　(ii) $\sin x/2, x\in[0,2\pi]$;

(iii) $\tan x, x\in(0,\pi)$.

(3) 试求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的非升重排.

解 (1) 证略.

(2) (i) $\sin\left(\frac{\pi-\tau}{2}\right)(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$; (ii) $\cos\frac{\tau}{4}(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$.

(iii) $\cot\tau(0<\tau<\pi)$.

(3) $f^*(\tau)=\sqrt{1-\tau/\pi}(0\leqslant\tau\leqslant\pi)$.

例 4 试解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$在 $I=(0,1)$上实值可测,则存在唯一的 $t_0\in\mathbf{R}^1$,使得

(i) $m(\{x\in I: f(x)\geqslant t_0\})\geqslant 1/2$.

(ii) 对任给 $\varepsilon>0, m(\{x\in I: f(x)\geqslant t_0+\varepsilon\})<1/2$.

(2) 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数. 若存在 $M\in\mathbf{R}^1$,使得

$$m(\{x\in E: f(x)\geqslant M\})\geqslant 1/2,$$

$$m(\{x\in E: f(x)\leqslant M\})\geqslant 1/2,$$

则称 M 为 f 的分布函数的中点. 试问中点是唯一的吗?

解 (1) 令 $g(t)=m(\{x\in I: f(x)\geqslant t\})$,则 $g(t)$递减左连续,且 $g(-\infty)=1, g(+\infty)=0$. 考查 $E=\{t\in\mathbf{R}^1: g(t)\geqslant 1/2\}$, E 是有上界的点集. 我们记 $\sup\{t: t\in E\}=t_0$,则 $t_0\in E$ 即为所求.

(2) 不一定.

第四章　Lebesgue 积分

§4.1　非负可测函数的积分

基本内容

(一) 非负可测简单函数的积分

定义 1　设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负可测简单函数，它在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 c_i：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{A_i}(x),\quad \bigcup_{i=1}^{p}A_i=\mathbf{R}^n,\quad A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j).$$

若 $E\in\mathscr{M}$，则定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E\cap A_i).$$

这里积分符号下的 $\mathrm{d}x$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上 Lebesgue 测度的标志.（注意，我们曾约定 $0\cdot\infty=0$.）

定理 1（积分的线性性质）　设 $f(x),g(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负可测简单函数，$f(x)$ 在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$，$g(x)$ 在点集 $B_j(j=1,2,\cdots,q)$ 上取值 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$，$E\in\mathscr{M}$，我们有

(i) 若 C 是非负常数，则 $\int_E Cf(x)\mathrm{d}x=C\int_E f(x)\mathrm{d}x$；

(ii) $\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

定理 2　若 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的递增可测集合列，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负可测简单函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x,\quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

(二) 非负可测函数的积分

定义 2　设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数. 我们定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\substack{h(x)\leqslant f(x)\\ x\in E}}\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x\text{: } h(x) \text{ 是 } \mathbf{R}^n \text{ 上的非负可测简单函数}\right\},$$

这里的积分可以是$+\infty$;若$\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$,则称$f(x)$在$E$上是**可积的**,或称$f(x)$是$E$上的**可积函数**(记为$f\in L(E)$).

由定义立即可知下列简单事实:

(i) 设$f(x)$,$g(x)$是E上的非负可测函数.若$f(x)\leqslant g(x)$ $(x\in E)$,则$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

这一事实指出:设$f(x)$在E上非负可测,我们有

(A) 若存在E上非负可积函数$F(x)$,使得$f(x)\leqslant F(x)$,$x\in E$,则$f(x)$在E上可积.

(B) 若$f(x)$在E上有界,且$m(E)<\infty$,则$f(x)$在E上可积.

(ii) 若$f(x)$是E上的非负可测函数,A是E中可测子集,则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) 设$f(x)$是E上非负可测函数.若$f(x)$在E上几乎处处等于零,则$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$;$\left(\text{从而易知,若 } m(E)=0\text{,则 } \int_E f(x)\mathrm{d}x=0.\right)$

若有$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$,则$f(x)$在$E$上几乎处处等于零.

定理 3 若$f(x)$是E上的非负可积函数,则$f(x)$在E上是几乎处处有限的.

注 设$f(x)$,$g(x)$是E上非负可积函数,则

$$\left(\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_E g(x)\mathrm{d}x\right).$$

定理 4(Beppo Levi 非负渐升列的积分) 设有定义在E上渐升的非负可测函数列:

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots,\quad \lim_{k\to\infty}f_k(x) = f(x),\quad x\in E,$$

则$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

注 设$f(x)$在$[a,b]$上非负可测,且在$[a+\varepsilon,b]$ $(\varepsilon>0)$上可积.若存在极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x = L,$$

则$f(x)$在$[a,b]$上可积,且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = L.$$

$\left(\text{区间}[a,b]\text{上的 Lebesgue 积分也记为}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)$类似地,还有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 5(积分的线性性质) 设 $f(x),g(x)$是 E 上的非负可测函数,α,β 是非负常数,则

$$\int_E(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 6 设$\{f_k(x)\}$是 E 上非负可积函数渐降列,且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),\quad \text{a.e. } x\in E,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 7(逐项积分) 若$\{f_k(x)\}$是 E 上的非负可测函数列,则

$$\int_E\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

推论 设 $E_k\in\mathscr{M}(k=1,2,\cdots),E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$. 若$f(x)$是 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 上的非负可测函数,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 8 (Fatou 引理) 若$\{f_k(x)\}$是 E 上的非负可测函数列,则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

定理 9 设 $f_k(x)(k\in\mathbf{N})$是 E 上非负可测函数. 若存在 E 上非负可积函数 $F(x)$: $f_k(x)\leqslant F(x)(x\in E)$,则

$$\varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x.$$

定理 10 设 $f(x)$是 E 上的几乎处处有限的非负可测函数,$m(E)<\infty$. 在$[0,\infty)$上作如下划分

$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_k < y_{k+1} < \cdots \to \infty,$$

其中 $y_{k+1}-y_k<\delta$ $(k=0,1,\cdots)$. 若令

$$E_k = \{x\in E: y_k\leqslant f(x) < y_{k+1}\}\quad (k=0,1,\cdots),$$

则 $f(x)$在 E 上是可积的当且仅当级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k)<+\infty$. 此时有

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k\to 0}^{\infty} y_k m(E_k) = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

典型例题精解

例 1 解答下列问题:

(1) 试作 $\mathbf{R}^1$ 上正值可测函数 $f(x)$,它在任一区间上都不可积.

(2) 设 $f(x),g(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数. 若 $f(x)=g(x)$, a. e. $x\in E$,试证明 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

(3) 设 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$是 E 上非负可积函数,试证明

(i) $F(x)=\left(\sum_{k=1}^{m}[f_k(x)]^2\right)^{1/2}$在 E 上可积;

(ii) $G(x)=\sum_{1\leqslant i,k\leqslant m}(f_i(x)f_k(x))^{1/2}$在 E 上可积.

(4) 试问 $f(x)=[1+(1+x)\mathrm{e}^{-x}]/(1+x^2)$在$[0,\infty)$上可积吗?

(5) 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数,且满足 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$,试证明 $m(E)=0$.

解 (1) 令 $\mathbf{Q}=\{r_n\}$,且作

$$g(x)=\begin{cases}x^{-1/2}, & 0<|x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\\ 0, & |x|=0,\end{cases}\qquad h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g(x-r_n),\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g^2(x-r_n),$$

则 $h(x)<+\infty$,a. e. $x\in\mathbf{R}^1$,$f(x)$满足要求.

(2) 令 $E_1=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}$,$E_2=E\setminus E_1$,$m(E_1)=0$. 我们有

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_E f(x)[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)]\mathrm{d}x\\ &=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_{E_1}g(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}g(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(3) (i) 注意不等式

$$\begin{aligned}F(x)&\leqslant(mf_1^2(x))^{1/2}+(mf_2^2(x))^{1/2}+\cdots+(mf_m^2(x))^{1/2}\\ &\leqslant\sqrt{m}(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x)).\end{aligned}$$

(ii) $G(x) \leqslant \sum_{1\leqslant i,k\leqslant m} [f_i(x)+f_k(x)]/2$.

(4) 注意到$(1+x)e^{-x}\to 0(x\to+\infty)$，故存在 $X>0$，使得

$$0 < f(x) \leqslant F(x) \xlongequal{\text{记为}} 2/(1+x^2) \quad (x \geqslant X).$$

而 $F(x)$在$[0,\infty)$上非负可积，因此 $f(x)$在$[0,\infty)$上可积.

(5) 反证法. 假定 $m(E)>0$，则存在 $F\subset E$：$m(F)>\delta_0>0$，以及 $k_0\in\mathbf{N}$：$f(x)\geqslant 1/k_0(x\in F)$. 从而知

$$0 = \int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_F f(x)\mathrm{d}x \geqslant m(F)/k_0 > \delta_0/k_0,$$

这导致矛盾. 证毕.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $f^3(x)$是 $E(m(E)<\infty)$上非负可积函数，则 $f^2(x)$在 E 上可积.

(2) 设 $f(x)$在$[0,\infty)$上非负可积，$f(0)=0$ 且 $f'(0)$存在，则存在积分

$$\int_{[0,\infty)} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是$[0,1]$中的可测集，$[0,1]$中每一点至少属于上述集合中的 k 个$(k\leqslant n)$，则在 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 中必有一个点集的测度大于或等于 k/n.

(4) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可测，φ：$(0,\infty)\to(a,\infty)(a>0)$且是递增函数，则

$$m(\{x\in\mathbf{R}^1: |f(x)|\geqslant a\}) \leqslant \frac{1}{\varphi(a)}\int_{\mathbf{R}^1}\varphi[|f(x)|]\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 注意，在 $A=\{x\in E: f(x)\leqslant 1\}$上 $f^2(x)$可积，在 $E\setminus A$ 上有 $f^2(x)\leqslant f^3(x)$.

(2) 因为我们有 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)/x = \lim\limits_{x\to 0+}[f(x)-f(0)]/(x-0) = f'(0)$，所以对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$0 \leqslant f(x)/x < f'(0)+\varepsilon \quad (0<x<\delta).$$

由此知 $f(x)/x$ 在$[0,\delta]$上可积，且从不等式

$$\int_\delta^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\delta}\int_\delta^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

可知 $f(x)/x$ 在$[\delta,\infty)$上可积，证毕.

(3) 因为当 $x\in[0,1]$时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\geqslant k,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\int_{[0,1]}\chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]}\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x\geqslant k.$$

若每一个 $m(E_i)$皆小于 k/n，则

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)<\frac{k}{n}\cdot n=k.$$

这与前式矛盾，故存在 i_0，使得 $m(E_{i_0})\geqslant k/n$.

(4) 注意不等式

$$\int_{\mathbf{R}^1}\varphi[|f(x)|]\mathrm{d}x\geqslant\int_{\{x\in\mathbf{R}^1:\ |f(x)|\geqslant a\}}\varphi[|f(x)|]\mathrm{d}x.$$

$$\geqslant\int_{\{x\in\mathbf{R}^1:\ |f(x)|\geqslant a\}}a\mathrm{d}x=a\cdot m(\{x\in\mathbf{R}^1:\ |f(x)|\geqslant a\}).$$

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$与 $g(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上非负可测函数，且 $m(E)=1$. 若有 $f(x)g(x)\geqslant1,x\in E$，则

$$\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_E g(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant 1.$$

(2) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上非负可积函数，令

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]}f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbf{R}^1.$$

若 $F\in L(\mathbf{R}^1)$，则 $\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x=0$.

(3) 设 $f(x)$是$[0,1]$上非负递增函数，则对$[0,1]$中的可测集 E: $m(E)=e$，有

$$\int_0^e f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 不妨设 $f(x)$，$g(x)$在 E 上可积，我们有

$$\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_E g(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\geqslant\int_E\sqrt{f(x)g(x)}\mathrm{d}x\geqslant m(E)=1.$$

由此即得所证.

(2) 注意,非负函数 $F(x)$ 随 x 增大而递增,且有

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

由此可知,若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\neq 0$,则 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上不可积,证毕.

(3) 令 $E_1=E\cap[0,e]$, $E_2=[0,e]\setminus E$, $E_3=E\cap[e,1]$,则 $E_1\cup E_2=[0,e]$, $E_1\cup E_3=E$, $m(E_2)=m(E_3)$. 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^e f(x)\mathrm{d}x &= \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + f(e)\cdot m(E_2) = \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_3} f(e)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_3} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 4 试证明下列命题:

(1) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上可测函数列,且

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x\in E.$$

若有 E 上非负可积函数 $g(x)$,使 $|f_k(x)|\leqslant g(x)$ $(k=1,2,\cdots)$,则对任给 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{j\to\infty} m\left(\bigcup_{k\geqslant j}^{\infty}\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\right) = 0.$$

(2) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可积函数,令 $0<q\leqslant b-a$,记 $\Gamma=\{E\subset[a,b]: m(E)\geqslant q\}$,则

$$\inf_{E\in\Gamma}\left\{\int_E f(x)\mathrm{d}x\right\} > 0.$$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负可测,且有

$$\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x = \lambda \quad (n=1,2,\cdots),$$

则存在 $[0,1]$ 中的可测集 E,使得 $f(x)=\chi_E(x)$, a.e. $x\in[0,1]$.

(4) 设 $f\in L(E)$ 且 $f(x)>0$ $(x\in E)$,则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = m(E).$$

证明 (1) 按第三章 §3.2 中的引理观之,本命题的区别在于没

有条件 $m(E)<+\infty$，使得从 $m(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k(\varepsilon))=0$ 推出 $m\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=0$ 缺乏根据($E_k(\varepsilon)=\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}$). 但从条件 $|f_k(x)|\leqslant g(x)(k\in\mathbf{N})$ 以及 $g(x)$ 的可积性，可知对一切 $k\in\mathbf{N}$，有

$$\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in E: g(x)>\varepsilon/2\},$$

$$\int_{\{x\in E:\, g(x)>\varepsilon/2\}}g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x<+\infty.$$

从而得到

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)\leqslant m(\{x\in E: g(x)>\varepsilon/2\})$$

$$\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\int_{\{x\in E:\, g(x)>\varepsilon/2\}}g(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

这就解决了上述困难. 证毕.

(2) 反证法. 假定 $\inf\limits_{E\in\Gamma}\left\{\int_E f(x)\mathrm{d}x\right\}=0$，则对任意的 $k\in\mathbf{N}$，存在 $E_k\subset[a,b]$: $m(E_k)\geqslant q$，使得 $\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x<1/2^k(k\in\mathbf{N})$. 令 $S=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$，易知 $m(S)\geqslant q$.

$$\int_S f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\chi_S(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\chi_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k}(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n+1}}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

由此又得(令 $n\to\infty$) $\int_S f(x)\mathrm{d}x=0$，即知 $f(x)=0$, a. e. $x\in S$. 这与题设矛盾，证毕.

(3) (i) 因为对任意的 $k\in\mathbf{N}$，有

$$m\left(\left\{x\in[0,1]: f(x)\geqslant1+\frac{1}{k}\right\}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)^n$$

$$\leqslant\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x=\lambda\quad(n\in\mathbf{N}),$$

所以必有 $m(\{x\in[0,1]: f(x)\geqslant1+1/k\})=0(k\in\mathbf{N})$. 由此知 $m(\{x\in[0,1]: f(x)>1\})=0$，即 $f(x)\leqslant1$, a. e. $x\in[0,1]$. 从而又有

$\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)=\begin{cases}1, & f(x)=1,\\ 0, & f(x)<1.\end{cases}$ 故令 $E=\{x\in[0,1]: f(x)=1\}$，从而知

$$m(E)=\int_0^1\chi_E(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty} f^n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x=\lambda.$$

即得所证.

注 上述命题中，若 $f(x)$ 不是非负函数，则结论改为 $f^2(x)=\chi_E(x)$，a.e. $x\in[0,1]$. 这只需注意公式

$$\int_0^1[f^2(x)]^n\mathrm{d}x=\int_0^1 f^{2n}(x)\mathrm{d}x=\lambda\quad(n=1,2,\cdots).$$

(4) 令 $E_1=\{x\in E: f(x)<1\}$，则

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_E f^{1/k}(x)\mathrm{d}x&=\lim_{k\to\infty}\int_{E_1} f^{1/k}(x)\mathrm{d}x+\lim_{k\to\infty}\int_{E\setminus E_1} f^{1/k}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{E_1}\lim_{k\to\infty} f^{1/k}(x)\mathrm{d}x+\int_{E\setminus E_1}\lim_{k\to\infty} f^{1/k}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{E_1}1\mathrm{d}x+\int_{E\setminus E_1}1\mathrm{d}x=m(E).\end{aligned}$$

例 5 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可积函数，$\{E_n\}$ 是 $[a,b]$ 中的可测子集列. 若有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

则 $m(E_n)\to 0\ (n\to\infty)$.

(2) 设 $\{E_n\}\subset[0,1]$ 是可测集列. 若 $m\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n\right)=0$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $[0,1]$ 中可测子集 A，使得 $m([0,1]\setminus A)<\varepsilon$，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A\cap E_n)<+\infty.$$

(3) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上非负可积函数列. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=0$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E[1-\mathrm{e}^{-f_k(x)}]\mathrm{d}x=0.$$

证明 (1) 反证法. 假定结论不真，则存在 $\varepsilon_0>0$，以及 $\{E_{n_k}\}$：$m(E_{n_k})\geqslant\varepsilon_0>0$. 从而根据前面的例题可知 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\left\{\int_{E_{n_k}} f(x)\mathrm{d}x\right\}>0$. 但这

与题设矛盾，证毕.

(2) 依题设知，存在 $Z\subset[0,1]$：$m(Z)=0$，对 $x\in[0,1]\setminus Z$，x 只属于 $\{E_n\}$ 中有限个，故有 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)<+\infty$，a. e. $x\in[0,1]$. 从而对任给 $\varepsilon>0$，存在 $A\subset[0,1]$ 以及 $M>0$，使得

$$m([0,1]\setminus A)<\varepsilon,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\leqslant M\quad (x\in A).$$

因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(A\cap E_n)=\int_A\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

注 结论不能改为 $\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)<+\infty$.

(3) 由公式 $1-\mathrm{e}^{-t}\leqslant t(0\leqslant t<\infty)$ 可知 $1-\mathrm{e}^{-f_n(x)}\leqslant f_n(x)$.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in C([0,\infty))\cap L([0,\infty))$，且是正值递减函数，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\int_x^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s=0$$

当且仅当对 $t>0$ 有 $f(x+t)/f(x)\to 0\ (x\to+\infty)$.

(2) 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上正值可测函数，且对任意的 $a>0$，$f\in L([0,a])$，$g\in L([0,a])$. 若有

$$\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=+\infty,\quad \int_0^{\infty}g(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

则存在充分大的值 r，使得对满足 $0\leqslant s\leqslant r$ 的 s，均有

$$\int_{r-s}^{r+s}f(x)\mathrm{d}x>\int_{r-s}^{r+s}g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 必要性 对 $x\leqslant s<x+t$，有

$$0<\frac{f(x+t)}{f(x)}\leqslant\int_x^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s/tf(x).$$

充分性 对 $\varepsilon>0$，取 $0<\delta<1$，$\delta/(1-\delta)<\varepsilon$，存在 $M>0$，使得 $f(x+\delta)\leqslant\delta f(x)(x>M)$. 由于对 $x>M$，

$$F(x)\xlongequal{\triangle}\frac{1}{f(x)}\int_x^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{f(x)}\left\{\int_x^{x+\delta}f(s)\mathrm{d}s+\int_x^{+\infty}f(u+\delta)\mathrm{d}u\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{f(x)}\int_x^{x+\delta} f(s)\mathrm{d}s + \delta F(x),$$

$$(1-\delta)F(x)\leqslant\int_x^{x+\delta} f(s)\mathrm{d}s/f(x)\leqslant\delta.$$

(2) 反证法. 假定存在 $M>0$,使得对 $r\geqslant M$,存在 S_r: $0\leqslant S_r\leqslant r$,有

$$\int_{r-S_r}^{r+S_r} g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{r-S_r}^{r+S_r} f(x)\mathrm{d}x.$$

但由题设知,存在 N: $N>M$,使得

$$\int_M^N f(x)\mathrm{d}x > 2\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

易知$\{(r-S_r,r+S_r)\}$是$[M,N]$的一个覆盖,故存在有限覆盖: $I_k=(r_k,S_{r_k})$ $(k=1,2,\cdots,l)$. 令 $J=\bigcup_{k=1}^{l} I_k$(使 J 中点至多属于 I_k 中的两个),因此

$$2\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \geqslant 2\int_J g(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{l}\int_{I_k} g(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{l}\int_{I_k} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_J f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_M^N f(x)\mathrm{d}x,$$

矛盾.

例 7 试证明下列命题:

(1) 设$\{E_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中递增可测集列,且 $E_k\to E(k\to\infty)$. 若 $f(x)$是 E 上非负可测函数,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots(x\in E)$. 若 $f_k(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$,则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $f(x)$是 E 上非负可积函数,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得

$$\int_E f(x)\chi_{\{x\in E:\, f(x)>N\}}(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(4) 设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$是 $\mathbf{R}^n$ 上非负可积函数列，若对任一可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$，都有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x \quad (k=1,2,\cdots),$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 注意到 $f(x)\chi_{E_k}(x)\leqslant f(x)\cdot\chi_{E_{k+1}}(x)(x\in\mathbf{R}^n)$，我们有(Beppo Levi 定理)

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\cdot\lim_{k\to\infty}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 由题设知，存在 $\{k_i\}$，使得 $\lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(x)=f(x)$，a. e. $x\in E$. 由此又知 $f_k(x)\to f(x)$，a. e. $x\in E$. 从而结论成立.

(3) 注意 $f(x)\chi_{\{x\in E:\ f(x)>N\}}(x)\geqslant f(x)\chi_{\{x\in E:\ f(x)>N+1\}}(x)(x\in E)$.

(4) 依题设知 $\int_E[f_{k+1}(x)-f_k(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0$，注意到这是对任一可测集 E 都成立的，故必有

$$f_{k+1}(x)-f_k(x)\geqslant 0,\quad f_{k+1}(x)\geqslant f_k(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^n.$$

由此知结论成立.

例 8 试证明下列命题：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(x^{1/n}-1)=\ln x\ (1<x<+\infty)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

(3) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上非负可积，且有

$$\int_{\mathbf{R}^1}|x|^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1 \quad (n\in\mathbf{N}).$$

若令 $I=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$，则 $f(x)=0$，a. e. $x\in I$.

证明 (1) 令 $f_n(t)=t^{1/n-1}(1<t<x)$，则对 $n\in\mathbf{N}$，

$$\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t = n(x^{1/n}-1),\quad f_n(t)\geqslant f_{n+1}(t)\ (1<t<x).$$

注意到 $f_1(t)=1, f_n(t)\geqslant 0(n\in\mathbf{N})$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{1/n}-1)=\lim_{n\to\infty}\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t=\int_1^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln x \quad (1<x<+\infty).$$

(2) 令 $f_n(x)=(1+x/n)^n\mathrm{e}^{-2x}\chi_{[0,n]}(x)(n\in\mathbf{N})$，则

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\mathrm{e}^{-x},\quad f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\quad (x\in\mathbf{N}).$$

由此即知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

(3) 反证法. 假定存在 $E\subset I$: $m(E)=\delta>0$，使得 $f(x)\neq 0(x\in E)$. 不妨设 $1\overline{\in} E$，我们有

$$|x|^n f(x)<|x|^{n+1}f(x)\quad (n\in\mathbf{N}),$$

$$\lim_{n\to\infty}|x|^n f(x)=+\infty,\ \text{a.e.}\ x\in E,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |x|^n f(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{n\to\infty}|x|^n f(x)\mathrm{d}x=+\infty.$$

这与题设矛盾，证毕.

例 9 试求下列积分之值：

(1) $I=\int_0^1\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x$； (2) $I=\int_0^1\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2\mathrm{d}x$；

(3) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$； (4) $I=\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$.

解 (1) 注意到 $x^{m-1}/(1+x^n)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且有

$$x^{m-1}(1+x^n)^{-1}=x^{m-1}(1-x^n+x^{2n}-x^{3n}+\cdots)$$

$$=x^{m-1}(1-x^n)(1+x^{2n}+\cdots)=(1-x^n)\sum_{k=0}^{\infty}x^{m-1+2kn},$$

以及 $(1-x^n)x^{m-1-2nk}\geqslant 0\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，故得(逐项积分)

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1(1-x^n)x^{m-1+2nk}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m+2nk}-\frac{1}{m+(2k+1)n}\right)$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\cdots.$$

(2) 注意到 $1/(1-x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(0<x<1)$，且有

$$\int_0^1 x^{n-1}(\ln x)^2\mathrm{d}x = \frac{2}{n^3} \quad (n\in\mathbf{N}),$$

故得

$$I=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(\ln x)^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^1 x^{n-1}(\ln x)^2\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{2}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\,\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{3}.$$

(3) 注意到 $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}=x\,\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\sum_{n=1}^{\infty}x\mathrm{e}^{-nx}$，且有

$$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=x\left(-\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-nx}\Big|_0^{+\infty}-\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2},$$

故得 $I=\pi^2/6$.

(4) 注意到 $\ln(1-x)=-(x+x^2/2+\cdots+x^n/n+\cdots)(-1\leqslant x<1)$，以及

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

我们有 $I=-\pi^2/6$.

(5) 注意到 $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}(-1<x<1)$，故

$$I=\int_0^1\frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\mathrm{d}x=2\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{2n-1}\mathrm{d}x$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{2n-2}}{2n-1}\mathrm{d}x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例 10 试证明下列命题：

(1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^{\alpha}x^n(\alpha<0)$ 在 $[0,1]$ 上可积.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n=\ln 2$.

(3) $x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}(\alpha>-1,\beta>0)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积.

(4) $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}(\alpha>1)$.

(5) $I=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+m^2}\right)=+\infty.$

(6) 设$\{r_k\}\subset[0,1]\cap\mathbf{Q}$,且令 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}/|x-r_k|^{1/2}$,则$f(x)<+\infty$,a. e. $x\in[0,1]$.

证明 (1) 因为我们有

$$\int_0^1 n^\alpha x^n \mathrm{d}x = n^\alpha\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{n^\alpha}{n+1},$$

所以得到

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 n^\alpha x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n+1}<+\infty.$$

(2) 因为我们有(Taylor 展式)

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

所以得到

$$\int_0^1\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

上式左端$=2\ln 2$;对于右端,可知

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}=\sum_{n=1}^{2m+2}(-1)^{n+1}/n.$$

令 $m\to\infty$,即得所证.

(3) 因为我们有

$$\mathrm{e}^{\beta x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta x)^k}{k!}\geqslant\frac{(\beta x)^n}{n!}\quad(n\in\mathbf{N}),$$

所以 $\mathrm{e}^{-\beta x}\leqslant n!x^{-n}/\beta^n$ $(n\in\mathbf{N})$. 作分解

$$x^\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}=x^\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}\chi_{[0,1)}(x)+x^\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}\chi_{[1,\infty)}(x)\triangleq f_1(x)+f_2(x),$$

则当 $\alpha>-1$ 时,$f_1(x)$在$[0,1)$上非负可积;对于 $f_2(x)$,有 $f_2(x)\leqslant\frac{n!}{\beta^n}x^{\alpha-n}\chi_{[1,\infty)}(x)$,取 n 使得 $\alpha-n<-1$,则知 $f_2(x)$在$[1,\infty)$上非负可

积，证毕.

注 由本题可知，$x^{t-1}e^{-x}(t>0)$在$[0,\infty)$上非负可积，且记为$\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}dx(t>0)=\Gamma(t)$，称为伽玛函数.

(4) 注意到$\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}=e^{-x}\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-nx}(x>0)$，根据非负可测函数逐项积分定理，可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{e^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-nx}dx\quad(\text{令 } x=t/n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\quad(\alpha>1).$$

(5) 注意到$\frac{1}{n^2+m^2}\geqslant\int_n^{n+1}\frac{dx}{m^2+x^2}$，我们有

$$I\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{dx}{m^2+x^2}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{m^2+x^2}$$

$$\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\int_1^{+\infty}\left(\int_m^{m+1}\frac{dy}{x^2+y^2}\right)dx=\int_1^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_m^{m+1}\frac{dy}{y^2+x^2}\right)dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2+x^2}\right)dx\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=+\infty.$$

(6) 注意到$\int_0^1|x-r_k|^{-1/2}dx=2(\sqrt{r_k}+\sqrt{1-r_k})$，我们有

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}2k^{-2}(\sqrt{r_k}+\sqrt{1-r_k})\leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}<+\infty.$$

注 $f(x)$无处连续，且在任一小区间上均无界.

例 11 试证明下列命题：

(1) 设$0<\varepsilon_n<1\ (n=1,2,\cdots)$，试证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$收敛的充分必要条件是：对任意的$E_n\subset[0,1](m(E_n)=\varepsilon_n(n=1,2,\cdots))$，必有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)<+\infty,\quad \text{a. e. } x\in[0,1].$$

(2) 设$E_n\subset[a,b]$：$m(E_n)\geqslant\delta>0(n\in\mathbf{N})$，$\{a_n\}$是数列. 若$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\chi_{E_n}(x)<+\infty$，a. e. $x\in[a,b]$，则$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$.

(3) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上非负可测. 若 $F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$在$(-\infty,\infty)$上可积,则 $f(x)=0$,a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

证明 (1) 必要性 只需注意公式

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n <+\infty.$$

充分性 反证法. 假定$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n=+\infty$,则存在$\{n_k\}$,使得 $\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\varepsilon_i >1(k\in\mathbf{N})$. 在$[0,1]$中作子区间:

$$E_{n_k+1},E_{n_k+2},\cdots,E_{n_{k+1}};\quad \bigcup_{n_k+1}^{n_{k+1}} E_i=[0,1];$$

$$m(E_i)=\varepsilon_i,\quad n_k+1\leqslant i\leqslant n_{k+1},\quad k=1,2,\cdots.$$

易知,$\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{E_i}(x)=+\infty$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. 矛盾.

(2) 令 $A_k=\{x\in[a,b]: f(x)>k\}(k\in\mathbf{N})$,则 $m(A_k)\to 0(k\to\infty)$. 取 k_0 充分大,使得对 $n\in\mathbf{N}$ 均有

$$m(E_n\cap A_{k_0})<\delta/2,\quad m(E_n\setminus A_{k_0})\geqslant\delta/2.$$

从而当 $x\in[a,b]\setminus A_{k_0}$时,就有$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\chi_{E_n}(x)\leqslant k_0$,

$$\frac{\delta}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|m(E_n\setminus A_{k_0})$$

$$=\int_{[a,b]\setminus A_{k_0}}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x\leqslant k_0(b-a).$$

(3) 由题设知,级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)$在$(-\infty,\infty)$上几乎处处收敛. 故对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 或 $n\leqslant -N$ 时,有 $f(x\pm n)<\varepsilon$. 现在假定对区间$[a,b]$,其结论不真,则有 $\varepsilon_0>0,\delta>0$,使得$m(\{x\in[a,b]: f(x)>\varepsilon_0\})=\delta>0$. 为此,我们取 ε: $\varepsilon<\varepsilon_0$,则当 $a\leqslant x+n\leqslant b$ 即 $a-n\leqslant x\leqslant b-n$ 且 $n\geqslant N$ 时,有 $f(x)<\varepsilon<\varepsilon_0$. 注意到 $n\geqslant N$ 时此种点集是可数集,故必有一正测度集移入$[a,b]$. 矛盾.

例 12 解答下列问题:

(1) 试举例说明 Fatou 引理中的不等号是可以成立的.

(2) 设 $f_n(x)(n\in\mathbf{N})$是 E 上非负可测函数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, a.e. $x\in E$, 且 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\right\}<+\infty$, 则 $f(x)$在 E 上可积.

(3) 设 $0\leqslant f_n\in C([0,1])(n\in\mathbf{N})$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0(n\to\infty,0\leqslant x\leqslant 1)$. 若存在 $M>0$, 使得

$$\left|\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M \quad (n\in\mathbf{N}),$$

试问是否成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0$?

解 (1) 在$[0,1]$上作非负可测函数列:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ n, & 0<x<\dfrac{1}{n},\\ 0, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \quad (n=1,2,\cdots).$$

显然, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0\ (x\in[0,1])$, 因此我们有

$$\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=0<1=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 只需注意不等式(根据 Fatou 引理)

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E \varliminf_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)<+\infty.$$

(3) 看(1)中例.

例 13 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$是$[0,1]$上的正值可测函数, $\{E_n\}\subset[0,1]$是可测点集列. 若有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $m\left(\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n\right)=0$.

(2) 设$\{f_k(x)\}$是 E 上非负可测函数列. 若有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad f_k(x)\leqslant f(x)\quad (x\in E,k=1,2,\cdots),$$

则对 E 中任一可测子集 e, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上非负可测函数. 若存在 $E_k\subset E$, $m(E\setminus E_k)<1/k(k\in\mathbf{N})$, 使得极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x$存在, 则 $f(x)$在 E 上可积.

(4) 设 $E_i\subset(0,1)$：$m(E_i)\geqslant\lambda(i\in\mathbf{N})$，令 $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\chi_{E_i}(x)}{n}(0<x<1)$，则存在 $A\subset(0,1)$：$m(A)>0$，使得

$$\varlimsup_{n\to\infty}f_n(x)\triangleq f(x)\geqslant\lambda\quad(x\in A).$$

证明 (1) 根据 Fatou 引理，可知

$$0=\varliminf_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}n=\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\int_0^1 f(x)\varliminf_{n\to\infty}\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\chi_{\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n}(x)\mathrm{d}x.$$

注意到 $f(x)>0(0\leqslant x\leqslant 1)$，故 $m(\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n)=0$.

(2) (i) 因为由题设可知 $\int_e f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_e f(x)\mathrm{d}x$，所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_e f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_e f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 另一方面，我们又有

$$\int_e f(x)\mathrm{d}x=\int_e\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_e f_n(x)\mathrm{d}x.$$

即得所证.

(3) 由题设知 $m(E\setminus E_{2^i})<1/2^i$，由此又得 $m(\varlimsup\limits_{i\to\infty}(E\setminus E_{2^i}))=0$. 从而我们有

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)(\chi_{E\setminus E_k}(x)+\chi_{E_k}(x))\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varliminf_{k\to\infty}(\chi_{E\setminus E_k}(x)+\chi_{E_k}(x))\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}\left[f(x)\varlimsup_{k\to\infty}\chi_{E\setminus E_k}(x)+f(x)\varliminf_{k\to\infty}\chi_{E_k}(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\chi_{\varlimsup\limits_{k\to\infty}(E\setminus E_k)}(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varliminf_{k\to\infty}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant 0+\varliminf_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x=\varliminf_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x<+\infty.\end{aligned}$$

(4) 反证法. 假定 $f(x)<\lambda$, a. e. $x\in(0,1)$，则由 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n} m(E_i)/n\geqslant\lambda$ 可知

$$\lambda>\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\mathrm{d}x\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda.$$

这导致矛盾，证毕.

例 14 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负实值可测函数，则 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot m(\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant n\})<+\infty.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可测，则 $f^3(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot m(\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant n\})<+\infty.$$

证明 (1) (i) 首先，若 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则易知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若令

$$E_n=\{x\in[a,b]:n\leqslant f(x)<n+1\},\quad n\in\mathbf{N},$$

则 $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n=b-a$，且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot m(E_n)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)m(E_n)=\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)+(b-a);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n} f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 m(E_n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n)+2\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)+(b-a).$$

这就是说，$f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 m(E_n)<+\infty,\quad \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)<+\infty.$$

(ii) 注意到等式

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot m(E_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2m(E_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}m(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}k\cdot m(E_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\sum_{n=k}^{\infty}m(E_n)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot m(\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant k\}),$$

即得所证.

(2) 令 $E_n=\{x\in[a,b]:n\leqslant f(x)<n+1\}(n\in\mathbf{N})$,则

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot m(E_n)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot m(E_n)+(b-a)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2m(E_n)\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2m(E_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot m(E_n)+2\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot m(E_n)+(b-a).$$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}n^3\cdot m(E_n)\leqslant\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n^3+3n^2+3n+1)m(E_n)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot m(E_n)+3\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot m(E_n)$$

$$+3\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot m(E_n)+(b-a).$$

从而即得:$f^3(x)$在$[a,b]$上可积当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot m(E_n)<+\infty$.

(iii) 因为$\sum_{k=1}^{n}k^2=[n(n+1)(2n+1)]/6=n^3/3+n^2/2+n/6$,所以

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot m(E_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot m(E_n)+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot m(E_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)m(E_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2\sum_{n=k}^{\infty}m(E_n)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot m(\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant k\}).$$

由此即得所证.

例 15 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$是 $I=[0,1]$上的非负可测函数. 则 $f(x)$在 I 上可积的充分必要条件是：

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n m(\{x\in I: f(x)\geqslant 2^n\})<+\infty.$$

(2) 设 $f(x)$是 $I=[0,\infty)$上非负有界可测函数. 则 $f(x)$在 I 上可积的充分必要条件是：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}m\left(\left\{x\in I: f(x)>\frac{1}{2^n}\right\}\right)<+\infty.$$

(3) 设 $f(x)$是 E 上正值可测函数,$a>1$,则 $a^{f(x)}$在 E 上可积的充分必要条件是：$\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cdot m(\{x\in E: f(x)\geqslant n\})$.

证明 (1) 令 $E_n=\{x\in I: 2^n\leqslant f(x)<2^{n+1}\}(n=0,1,2,\cdots)$,以及 $\widetilde{E}_n=\{x\in I: f(x)\geqslant 2^n\}$,易知 $E_n=\widetilde{E}_n\setminus\widetilde{E}_{n+1}(n=0,1,2,\cdots)$. 又不妨假定 $f(x)$是实值函数,且记 $e=\{x\in I: f(x)<1\}$,则 $I=e\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n$.

充分性 假定 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot m(\widetilde{E}_n)<+\infty$,则 $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\cdot m(\widetilde{E}_{n+1})<+\infty$.

由此知 $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(m(\widetilde{E}_n)-m(\widetilde{E}_{n+1}))=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}m(E_n)<+\infty$. 因为

$$\int_{I\setminus e}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\cdot m(E_n),$$

所以 $f(x)$在 I 上可积(易知 $f(x)$在 e 上必可积).

必要性 假定 $f(x)$在 I 上可积,则

$$\begin{aligned}+\infty>\int_I f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\int_{\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot m(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1+2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})m(E_n)+m(E_0)\\&=m(E_0)+\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot m(\widetilde{E}_n).\end{aligned}$$

(2) 证略.

(3) 令 $E_n=\{x\in E: f(x)\geqslant n\}$, 我们有

$$a^{n-1}\cdot m(E_{n-1}\setminus E_n)\leqslant\int_{E_{n-1}\setminus E_n}a^{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant a^n\cdot m(E_{n-1}\setminus E_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\cdot m(E_{n-1}\setminus E_n)\leqslant\int_E a^{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cdot m(E_{n-1}\setminus E_n).$$

再对不等式两端的级数应用 Abel 求和法即可证得.

例 16 设 $u(x)=1(x\leqslant \mathrm{e}),u(x)=\ln x(x\geqslant \mathrm{e})$.

(1) 设 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上正值可测,且有

$$\int_{\mathbf{R}^1}f^2(x)u[f(x)]\mathrm{d}x<+\infty,$$

$$\int_{\mathbf{R}^1}\frac{g^2(x)\mathrm{d}x}{u[g(x)]}<+\infty,$$

试证明乘积 $f\cdot g\in L(\mathbf{R}^1)$.

(2) 设 $\{g_n(x)\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上正值可测函数列, $f(x)$ 同(1). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\frac{g_n^2(x)\mathrm{d}x}{u[g_n(x)]}=0$,试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1}f(x)g_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明 (1) 只需指出

$$xy\leqslant 2x^2u(x)+y^2/u(y)\quad(x,y\geqslant 0).\tag{*}$$

因为若 $x\leqslant y/u(y)$,则 $xy\leqslant y^2/u(y)$,所以上式成立;反之,如果有 $x>y/u(y)$,那么在 $y\leqslant \mathrm{e}$ 时有 $y\leqslant x$,故得 $xy\leqslant x^2\leqslant x^2u(x)$,上式也成立;而在 $y\geqslant \mathrm{e}$ 时,易知$\sqrt{y}\leqslant(2/\mathrm{e})(y/\ln y)\leqslant 2x/\mathrm{e}\leqslant x$. 由此知 $\ln y\leqslant 2\ln x$,且我们有

$$xy\leqslant x^2\ln y\leqslant 2x^2\ln x\leqslant 2x^2u(x).$$

(2) 对 $0<r<1$,在(*)式中以 $rf(x)$代替 x,以 $g_n(x)$代替 y,并注意 $u[rf(x)]\leqslant u[f(x)]$,并对代后(*)式作积分,我们有

$$\int_{\mathbf{R}^1}f(x)g_n(x)\mathrm{d}x\leqslant 2r\int_{\mathbf{R}^1}f^2(x)u[f(x)]\mathrm{d}x+\frac{1}{r}\int_{\mathbf{R}^1}\frac{g_n^2(x)\mathrm{d}x}{u[g_n(x)]},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbf{R}^1}f(x)g_n(x)\mathrm{d}x\leqslant 2r\int_{\mathbf{R}}f^2(x)u[f(x)]\mathrm{d}x.$$

再令 $r\to 0$,即得所证.

§4.2 一般可测函数的积分

基本内容

定义 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.若积分

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x,\quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个是有限值,则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$在 E 上的**积分**;当上式右端两个积分值皆为有限时,则称 $f(x)$在 E 上是**可积的**,或称 $f(x)$是 E 上的**可积函数**.在 E 上可积的函数的全体记为 $L(E)$.通常把$[a,b]$上的 Lebesgue 积分记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

由于等式

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

成立,故知在 $f(x)$可测的条件下,$f(x)$的可积性与$|f(x)|$的可积性是等价的,且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

由定义立即可知下述简单性质:

(i) 若 $m(E)<+\infty$,$f(x)$是 E 上有界可测函数,则 $f\in L(E)$;

(ii) 若 $f\in L(E)$,则 $f(x)$在 E 上是几乎处处有限的;

(iii) 若 $E\in\mathscr{M}$,且 $f(x)=0$, a.e. $x\in E$,则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$;

(iv) 若 $f(x)$是 E 上的可测函数,$g\in L(E)$且$|f(x)|\leqslant g(x)$,$x\in E$($g(x)$称为 $f(x)$的控制函数),则 $f\in L(E)$;

(v) 若 $f\in L(E)$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得

$$\int_{\{x\in E,\ |x|\geqslant N\}}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon,\quad \lim_{N\to\infty}\int_{\{x\in E;\ |x|\geqslant N\}}|f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

定理 1(积分的线性性质) 若 $f,g\in L(E)$,$C\in\mathbf{R}^1$,则

(i) $\int_E Cf(x)\mathrm{d}x=C\int_E f(x)\mathrm{d}x$;

(ii) $\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

关于函数的乘积我们有:若 $f\in L(E)$,$g(x)$是 E 上的有界可测函数,则 $f\cdot g$

$\in L(E)$. 这是因为我们有

$$|f(x)\cdot g(x)|\leqslant|f(x)|\cdot\sup_{x\in E}|g(x)|,\quad x\in E.$$

从上述性质可知，若 $f\in L(E)$，且 $f(x)=g(x)$, a.e. $x\in E$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

因此，改变一个函数在零测集上的值，不会影响该函数的可积性与积分值.

定理 2（Jensen 不等式） 设 $w(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上正值可测函数，且 $\int_E w(x)\mathrm{d}x=1$；$\varphi(x)$ 是区间 $I=[a,b]$ 上的（下）凸函数；$f(x)$ 在 E 上可测，且值域 $R(f)\subset I$，若 $fw\in L(E)$，则

$$\varphi\left(\int_E f(x)w(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_E\varphi[f(x)]w(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3（积分对定义域的可数可加性） 设 $E_k\in\mathscr{M}$ $(k=1,2,\cdots)$，$E_i\cap E_j=\varnothing$ $(i\neq j)$. 若 $f(x)$ 在 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 上可积，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 4（积分的绝对连续性） 若 $f\in L(E)$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 E 中子集 e 的测度 $m(e)<\delta$ 时，有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_e|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

定理 5（积分变量的平移变换） 若 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，则对任意的 $y_0\in\mathbf{R}^n$，$f(x+y_0)\in L(\mathbf{R}^n)$，且有

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(x+y_0)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{d}x.$$

注 1 设 $I\subset\mathbf{R}^1$ 是区间，$f\in L(I)$，$a\neq0$，记 $J=\{x/a:\ x\in I\}$，$g(x)=f(ax)$ $(x\in J)$，则 $g\in L(J)$，且有 $\int_I f(x)\mathrm{d}x=|a|\int_J g(x)\mathrm{d}x$.

注 2 对 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，$a\in\mathbf{R}^1-\{0\}$，则

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{|a|^n}\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{d}x.$$

典型例题精解

例 1 解答下列问题：

(1) 设有定义在 $E=[0,1]\times[0,1]$ 上的二元函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\cdot y\text{ 为无理数},\\ 2, & x\cdot y\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

试求积分 $\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 之值.

(2) 设有函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \cos x \text{ 是有理数},\\ \cos^2 x, & \cos x \text{ 是无理数},\end{cases}$ 试求积分 $\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x$之值.

(3) 设 $f\in C([0,1])$, $f(0)=0$ 且存在 $f'(0)$, 试证明 $g(x)=f(x)/x^{3/2}$在$[0,1]$上可积.

(4) 试作定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的可微函数 $f(x)$, 使得 $f'\notin L([0,1])$, 但存在 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f'(x)\mathrm{d}x$.

(5) 试作 $\mathbf{R}^1$ 上两个具有紧支集的可积函数: $f(x)$, $g(x)$, 使得 $g[f(x)]$在 $\mathbf{R}^1$ 上不可积.

解 (1) 记 $\mathbf{Q}\cap(0,1]=\{r_n\}$, 注意到曲线 $x\cdot y=r_n$ 或 $y=x/r_n$ $(n\in\mathbf{N})$只有可列条, 故其全体是 $\mathbf{R}^2$ 中的零测集. 从而知

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

(2) 记 $\mathbf{Q}\cap[0,1]=\{r_n\}$, 注意到 $\cos x=r_n$ 的点 x 全体为可列集, 故是零测集, 由此知

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

(3) 由题设知, 存在 δ: $0<\delta<1$, 使得当 $0<x<\delta$ 时有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant |f'(0)|+1 \triangleq M.$$

从而有 $|f(x)/x^{3/2}|\leqslant M/\sqrt{x}$ $(0<x<\delta)$, 而 $g(x)$在$[\delta,1]$上是连续函数, 自然是可积的. 因此 $g\in L([0,1])$.

(4) 作 $f(x)=x^2\sin(1/x^2)$ $(x\neq 0)$; $f(0)=0$, 则对任给 $\varepsilon>0$, $f'(x)$ 在$[\varepsilon,1]$上连续, 且易知存在 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f'(x)\mathrm{d}x$. 然而, 由

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

并注意到 $\sin t\geqslant 2t/\pi$ $(0\leqslant t\leqslant \pi/2)$, 可知

$$\sin x^2 \geqslant 2x^2/\pi \quad (0<x^2\leqslant \pi/2).$$

又有 $\sin(1/x^2)\geqslant 2/(\pi x^2)(2/\pi\leqslant x^2<+\infty)$，从而得

$$|2x\sin(1/x^2)|\geqslant 4/(\pi x),\quad |-(2/x)\cos(1/x^2)|\leqslant 2/|x|.$$

于是我们有 $|f'(x)|\geqslant(2-4/\pi)/|x|$，$f'\overline{\in}L([0,1])$.

(5) 作函数 $f(x)=\chi_{\{0\}}(x)$，$g(x)=\chi_{\{0,1\}}(x)$，则 $g[f(x)]\equiv 1$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 若 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，$g\in L(\mathbf{R}^n)$，则函数

$$m(x)=\min_{x\in\mathbf{R}^n}\{f(x),g(x)\},\quad M(x)=\max_{x\in\mathbf{R}^n}\{f(x),g(x)\}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 上可积.

(2) 设 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，$g\in C(\mathbf{R}^n)$ 且 $g(x)\geqslant 0(x\in\mathbf{R}^n)$，则 $\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$在 $\mathbf{R}^n$ 上可积.

(3) 设 $f(x)$是$[0,1]$上的可测函数，且有

$$\int_{[0,1]}|f(x)|\ln(1+|f(x)|)\mathrm{d}x<\infty,$$

则 $f\in L([0,1])$.

(4) 设 $f(x)$，$g(x)$是 $I=[a,b]$上的实值可积函数. 若有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

则或者 $f(x)=g(x)$，a. e. $x\in[a,b]$，或者存在 $E\subset[a,b]$，使得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x>\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 注意等式

$$m(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2},$$

$$M(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

对 a. e. $x\in\mathbf{R}^n$ 成立.

(2) 作点集：$E_1=\{x\in\mathbf{R}^n\colon f(x)\leqslant 0\}$，以及

$$E_2=\{x\in\mathbf{R}^n\colon g(x)\leqslant f(x)\},\quad E_3=\{x\in\mathbf{R}^n\colon f(x)<g(x)\},$$

则易知 $\varphi(x)=f(x)(x\in E_1)$，$\varphi(x)=g(x)(x\in E_2)$，$\varphi(x)=f(x)(x\in E_3)$，且有 $\mathbf{R}^n=E_1\cup E_2\cup E_3$. 显然可得 $\varphi\in L(E_1)$，$\varphi\in L(E_3)$，而由$\varphi(x)=g(x)\leqslant f(x)(x\in E_2)$又知 $\varphi\in L(E_2)$，证毕.

(3) 为了阐明 $f\in L([0,1])$，自然想到去寻求可积的控制函数. 题

设告诉我们$|f(x)|\ln(1+|f(x)|)$是$[0,1]$上的可积函数,难道它能控制$|f(x)|$吗?显然,这只是在$\ln(1+|f(x)|)\geqslant 1$或$|f(x)|\geqslant e-1$时才行. 但注意到$|f(x)|<e-1$时,由于区间$[0,1]$的测度是有限的,故常数$e-1$本身就是控制函数. 也就是说,可在不同的定义区域寻求不同的控制函数.

为此,作点集

$$E_1=\{x\in[0,1]:\ |f(x)|\leqslant e\},\quad E_2=[0,1]\setminus E_1,$$

则我们有

$$|f(x)|\leqslant e,\quad x\in E_1;$$

$$|f(x)|\leqslant |f(x)|\ln(1+|f(x)|),\quad x\in E_2.$$

这就是说$f\in L(E_1)$且$f\in L(E_2)$,从而

$$f\in L(E_1\cup E_2)=L([0,1]).$$

(4) 假定对任一可测集$E\subset[a,b]$,有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x. \tag{*}$$

由此以及题设知,对任一可测集$E\subset[a,b]$,必有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(否则,存在$E_0\subset[a,b]$,使得$\int_{E_0}f(x)\mathrm{d}x<\int_{E_0}g(x)\mathrm{d}x$,而得出$\int_{I\setminus E_0}f(x)\mathrm{d}x>\int_{I\setminus E_0}g(x)\mathrm{d}x$,这与(*)式矛盾.)

对任给$\varepsilon>0$,作点集

$$E_+=\{x\in I:\ f(x)\geqslant g(x)+\varepsilon\},$$

$$E_-=\{x\in I:\ f(x)\leqslant g(x)-\varepsilon\},$$

易知$\int_{E_+}f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_+}g(x)\mathrm{d}x$,$\int_{E_-}f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_-}g(x)\mathrm{d}x$,从而得出$m(E_+)=m(E_-)=0$. 这说明

$$m(\{x\in I:\ f(x)\neq g(x)\})$$

$$=m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in I:\ |f(x)-g(x)|\geqslant 1/n\}\Big)=0,$$

即得所证.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是 E 上可测函数. 若存在 $\varphi\in L(E)$, $\psi\in L(E)$, 使得 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)(x\in E)$, 则 $f\in L(E)$.

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 E 上可测函数. 若有

$$f(x)\leqslant g(x)\ (x\in E),\quad \int_E f(x)\mathrm{d}x>-\infty,$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 存在 $f\in L([0,1])$, 而没有 $g\in C([0,1])$, 能使得 $f(x)=g(x)$, a. e. $x\in[0,1]$.

(4) 存在定义于 $\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数, 使得对任一区间 $[a,b]$, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=+\infty.$$

证明 (1) 注意 $f^+(x)\leqslant\psi^+(x)$, $f^-(x)\leqslant\varphi^-(x)(x\in E)$.

(2) 注意 $f^+(x)\leqslant g^+(x)$, $f^-(x)\geqslant g^-(x)(x\in E)$, 故知

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g^+(x)\mathrm{d}x,\quad \int_E g^-(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f^-(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_E g^+(x)\mathrm{d}x-\int_E g^-(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(3) 作 $[0,1]$ 中类 Cantor 集 H：$m(H)=\delta>0$. 因为点集 $[0,1]\setminus H$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 且有 $\chi_H(x)=0(x\in[0,1]\setminus H)$, 所以如果存在 $g\in C([0,1])$, 使得 $g(x)=\chi_H(x)$, a. e. $x\in[0,1]$, 那么 $g(x)\equiv0$. 但这是不可能的 ($\chi_H(x)=1(x\in H)$, 且 $m(H)=\delta>0$, $\chi_H\in L([0,1])$), 证毕.

(4) 在 $[n,n+1](n\in\mathbf{N})$ 中作类 Cantor 集 $H_n(n\in\mathbf{N})$, 使得 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}m(H_n)=1$. 若 $H\subset[a,b]$ 是类 Cantor 集, 记其相应之类 Cantor 函数 $\varphi_H(x)$, 它是递增的且将 H 映射到 $[0,1]$ 上. 令

$$\psi_H(x)=\tan[\pi\varphi_H(x)/2]\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

它把点集 $H\cap(a,b)$ 映射于 $(0,\infty)$ 上. 作

$$f(x)=\begin{cases}\psi_{H_n}(x), & x\in H_n(n\in\mathbf{N}),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=+\infty$.

例 4 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，且对任意的区间 I，记

$$f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(x)\mathrm{d}x,\quad E_I=\{x\in I: f(x)>f_I\},$$

则
$$\int_I|f(x)-f_I|\mathrm{d}x=2\int_{E_I}[f(x)-f_I]\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f\in L([a,\infty))$，令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 若 $F(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上递增，则 $f(x)\geqslant 0$, a. e. $x\in[0,\infty)$.

(3) 设 $E_k\subset[0,1](k=1,2,\cdots,N)$ 是可测集，其中任意三个之并均为 $[0,1]$. 又令 $S_1=\sum_{k=1}^N m(E_k)$，以及

$$S_2=\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N m(E_j\cap E_k),\quad S_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}m(E_i\cap E_j\cap E_k),$$

则

$$I\triangleq\int_0^1\Big(\sum_{k=1}^N\chi_{E_k}(x)\Big)^3\mathrm{d}x=S_1+6S_2+6S_3.$$

(4) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上且 $f(x)\geqslant 1$ 的可测函数，则

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)\mathrm{d}x\geqslant\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\Big).$$

证明 (1) 注意到 E_I 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\int_I|f(x)-f_I|\mathrm{d}x&=\int_{E_I}(f(x)-f_I)\mathrm{d}x+\int_{I\setminus E_I}(f_I-f(x))\mathrm{d}x\\&=J_1+J_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_2&=f_I(|I|-m(E_I))-f_I\cdot|I|+\int_{E_I}f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{E_I}f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_I}f_I\mathrm{d}x=\int_{E_I}(f(x)-f_I)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此即得所证.

(2) 不妨假定 $f(x)$ 是实值函数. 由题设可知, 对开集 $G\subset[a,\infty)$, 必有 $\int_G f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 从而对 $[a,\infty)$ 中的 G_δ 型集 H, 也有 $\int_H f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 这就导致对 $[a,\infty)$ 中的任一可测集 E, 有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 现在令

$$E_n=\{x\in[a,\infty):f(x)<-1/n\}\quad(n\in\mathbf{N}),$$

$$E=\{x\in[a,\infty):f(x)<0\},$$

$$0\leqslant\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{n}\cdot m(E_n)\leqslant 0,\quad m(E_n)=0\quad(n\in\mathbf{N}).$$

易知 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 而且 $m(E)=0$, 即得所证.

(3) 注意 $E_i\cup E_j\cup E_k=[0,1]\,(1\leqslant i<j<k\leqslant N)$, 以及

$$\begin{aligned}\chi_{[0,1]}(x)=&\chi_{E_i}(x)+\chi_{E_j}(x)+\chi_{E_k}(x)-\chi_{E_i}(x)\chi_{E_j}(x)\\&-\chi_{E_i}(x)\chi_{E_k}(x)-\chi_{E_j}(x)\chi_{E_k}(x)\\&+\chi_{E_i}(x)\chi_{E_j}(x)\chi_{E_k}(x),\end{aligned}$$

故可知

$$\begin{aligned}1=&m(E_i)+m(E_j)+m(E_k)-m(E_i\cap E_j)\\&-m(E_j\cap E_k)-m(E_i\cap E_k)+m(E_i\cap E_j\cap E_k).\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}I=&\int_0^1\sum_{k=1}^{N}\chi_{E_k}^3(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}(\chi_{E_i}^2(x)\chi_{E_j}(x)+\chi_{E_i}(x)\chi_{E_j}^2(x))\mathrm{d}x\\&+6\int_0^1\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}\chi_{E_i}(x)\chi_{E_j}(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x=S_1+6S_2+6S_3.\end{aligned}$$

(4) (i) 设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 则由 $x\ln x\geqslant\ln x\,(x>0)$ 可知

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 假定 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=l\neq 1$, 令 $g(x)=f(x)/l$, 则 $g(x)>0\,(0\leqslant x\leqslant 1)$, 且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=1$. 从而可得

$$\int_0^1 g(x)\ln g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 \frac{f(x)[\ln f(x) - \ln l]}{l} \mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln\left(\frac{f(x)}{l}\right) \mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{l}\int_0^1 f(x)\ln f(x)\mathrm{d}x - \ln l \geqslant \int_0^1 \ln f(x) - \ln l,$$

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)\mathrm{d}x \geqslant l \cdot \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

例 5 试证明下列命题：

(1) 设$\{f_k(x)\}$是 E 上的可测函数渐升列. 若 $\int_E f_1(x)\mathrm{d}x > -\infty$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x > -\infty.$$

(2) 设$\{f_k(x)\}$是 E 上的可测函数渐降列. 若 $\int_E f_1(x)\mathrm{d}x < +\infty$，则

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

(3) 设$\{f_k(x)\}$是 E 上的可测函数列，$F\in L(E)$且 $F(x)>0(x\in E)$. 若 $f_k(x)\geqslant -F(x)(x\in E)$，则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $f_k\in L(E)(k\in \mathbf{N})$，$F\in L(E)$. 若有

$$f_k(x) \leqslant F(x)\ (x\in E), \quad \varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \neq -\infty,$$

则 $\varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)$在 E 上可积，且有

$$\int_E \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \geqslant \varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

(5) 设 $F\in L(E)$，$f_k\in L(E)(k\in \mathbf{N})$. 若有

$$f_k(x) \geqslant F(x)\ (k\in \mathbf{N}), \quad \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \neq +\infty,$$

则 $\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

证明 (1) 令 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)(x\in E)$，则易知

$$f_1^+(x) \leqslant f_2^+(x) \leqslant \cdots \leqslant f_k^+(x) \leqslant \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} f_k^+(x) = f^+(x),$$

$$f_1^-(x) \geqslant f_2^-(x) \geqslant \cdots \geqslant f_k^-(x) \geqslant \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} f_k^-(x) = f^-(x).$$

从而得 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k^+(x)\mathrm{d}x=\int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k^+(x)\mathrm{d}x$. 又因 $\int_E f_1^-(x)\mathrm{d}x<+\infty$,所以又得 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k^-(x)\mathrm{d}x$. 于是我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x > -\infty.$$

(2) 对$\{-f_k(x)\}$作类似于(1)中之推理.

(3) 因为我们有 $f_k(x)+F(x)\geqslant 0(x\in E)$,所以

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty}(f_k(x) + F(x))\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E (f_k(x) + F(x))\mathrm{d}x.$$

注意到 $F\in L(E)$,可知

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x) + \int_E F(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x + \int_E F(x)\mathrm{d}x.$$

由此即得所证.

(4) 因为对任意的 $m\in\mathbf{N}$,有

$$F(x) \geqslant \sup_{k\geqslant m}\{f_k(x)\} \geqslant f_k(x) \quad (k\geqslant m),$$

所以推出(任意 $m\in\mathbf{N}$)

$$+\infty > \int_E \sup_{k\geqslant m}\{f_k(x)\}\mathrm{d}x \geqslant \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \quad (k\geqslant m),$$

$$+\infty > \int_E \sup_{k\geqslant m}\{f_k(x)\}\mathrm{d}x \geqslant \varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x > -\infty.$$

注意到 $\sup\limits_{k\geqslant m}\{f_k(x)\}\geqslant \sup\limits_{k\geqslant m+1}\{f_k(x)\}(m\in\mathbf{N})$,故令 $m\to\infty$即得

$$\begin{aligned}\varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x &\leqslant \lim_{m\to\infty}\int_E \sup_{k\geqslant m}\{f_k(x)\}\mathrm{d}x \\ &= \int_E \lim_{m\to\infty}\sup_{k\geqslant m}\{f_k(x)\}\mathrm{d}x = \int_E \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(5) 类似于(4)中之推理考查$\{-f_k(x)\}$.

例 6 试证明下列命题:

(1) 若 $f\in L(E)$,则有

$$m(\{x\in E: |f(x)|>k\}) = O(1/k) \quad (k\to\infty).$$

(2) 设 $f\in L((0,\infty))$,令 $f_n(x)=f(x)\chi_{(0,n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$,则 $f_n(x)$在$(0,\infty)$上依测度收敛于 $f(x)$.

(3) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，则对 $\alpha>0$ 有

$$m\left(\left\{x\in\mathbf{R}^1:\ |f(x)|\geqslant\alpha\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)|\mathrm{d}x\right\}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}.$$

(4) 设 $\varphi(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的递增函数，$f(x)$ 以及 $f_k(x)(k\in\mathbf{N})$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上实值可测函数. 若有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi(|f_k(x)-f(x)|)\mathrm{d}x=0,$$

则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

(5) 设 $f_n\in L([0,1])$，$f_n(x)\geqslant0(x\in[0,1])$ 且 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\lambda_n>0$ $(n\in\mathbf{N})$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}<+\infty$，则对 a.e. $x\in[0,1]$，存在 N，使得 $f_n(x)\leqslant\sqrt{\lambda_n}\,(n>N)$.

证明 (1) 令 $E_k=\{x\in E:\ |f(x)|>k\}$，并注意不等式

$$k\cdot m(E_k)\leqslant\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty.$$

(2) 对任给 $\sigma>0$，令 $E_n=\{x\in(0,\infty):\ |f_n(x)|\geqslant\sigma\}(n\in\mathbf{N})$，则

$$m(E_n)\cdot\sigma\leqslant\int_{E_n}|f_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}|f(x)\chi_{[n,\infty)}(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_n^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\to0\quad(n\to\infty).$$

(3) 令 $l=\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)|\mathrm{d}x$，$E_\alpha=\{x\in\mathbf{R}^1:\ |f(x)|\geqslant\alpha l\}$，我们有

$$l\geqslant\int_{E_\alpha}|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\alpha l\cdot m(E_\alpha).$$

由此即得所证.

(4) 由题设可知，对任给 $\sigma>0$，有

$$\varphi(\sigma)m(\{x\in E:\ |f_k(x)-f(x)|>\sigma\})\leqslant\int_E\varphi(|f_k(x)-f(x)|)\mathrm{d}x.$$

由此即得所证.

(5) 令 $E_n=\{x\in[0,1]:\ f_n(x)>\sqrt{\lambda_n}\}(n\in\mathbf{N})$，我们有

$$m(E_n)=\int_0^1\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_n}(f_n(x)/\sqrt{\lambda_n})^{1/2}\mathrm{d}x$$

$$=\lambda_n^{-1/4}\cdot\int_{E_n}\sqrt{f_n(x)}\mathrm{d}x\leqslant\lambda_n^{-1/4}\cdot\sqrt{m(E_n)}\cdot\left(\int_{E_n}f_n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\lambda_n^{1/2}\cdot\lambda_n^{-1/4}\cdot\sqrt{m(E_n)}=\lambda_n^{1/4}\cdot m(E_n)^{1/2}.$$

由此知 $m(E_n)\leqslant\sqrt{\lambda_n}\,(n\in\mathbf{N})$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}<+\infty$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)<+\infty$. 从而 $m(Z)=0\,(Z=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n)$，因此对 $x\overline{\in}Z$，就存在 N，使得 $x\overline{\in}E_n\,(n>N)$，即 $f_n(x)\leqslant\sqrt{\lambda_n}\,(n>N)$.

例 7 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 在 E 上非负可测，则点集

$$Y=\{y\in\mathbf{R}^1:\ m(\{x\in E:\ f(x)=y\})\neq 0\}$$

是可数集.

(2) 设 $f\in L([0,1])$，且是周期为 1 的周期函数. 令 $S_k(x)=\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}f\left(x+\frac{i}{2^k}\right)\,(k\in\mathbf{N})$，则

$$\lim_{k\to\infty}S_k(x)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,\quad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

注 对于 $g_k(x)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}f\left(x+\frac{i}{k}\right)$，极限 $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)$ 可以几乎处处不存在.

(3) 设 $m(E)<+\infty$，$f(x)$ 是 E 上的可测函数，且有 $0\leqslant f(x)<M\,(x\in E)$. 对分划 Δ：$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=M$，作 $E_j=\{x\in E:\ f(x)\geqslant t_j\}\,(j=1,2,\cdots,n-1)$，且记 $S_\Delta=\sum_{j=1}^{n-1}(t_j-t_{j-1})m(E_j)$，则

$$\sup_{\Delta}\{S_\Delta\}=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上具有正周期 T 的可测函数，且 $\int_0^T|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) (i) 假定 $f\in L(E)$，且令

$$Y_{\varepsilon,\eta}=\{y>\eta:\ m(\{x\in E:\ f(x)=y\})>\varepsilon\},$$

对 $t_1,t_2,\cdots,t_N\in Y_{\varepsilon,\eta}$，我们有

$$N\varepsilon\eta \leqslant \sum_{i=1}^{N} t_i \cdot m(\{x \in E: f(x) = t_i\}) \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明 $Y_{\varepsilon,\eta}$是有限集,$Y \triangleq \bigcup_{k,j\in\mathbf{N}} Y_{1/k,1/j}$是可数集.

(ii) 若 $f(x)$在 E 上不可积,则对 $m\in\mathbf{N}$,考查 $\min\{f(x),m\}$.

(2) 证略.

(3) 对分划 Δ,作简单函数($E_n=\varnothing$)

$$f_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n-1} t_i \chi_{E_i\setminus E_{i+1}}(x) \quad (x \in E),$$

则 $0\leqslant f_\Delta(x)\leqslant f(x)(x\in E)$. 从而知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f_\Delta(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n-1} t_i(m(E_i) - m(E_{i+1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}(t_i - t_{i-1})m(E_i) = S_\Delta.$$

此外,对任给 $\varepsilon>0$,作分划 Δ,使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|t_i - t_{i-1}| < \varepsilon, \quad f(x) - \varepsilon < f_\Delta(x) \leqslant f(x) \quad (x \in E).$$

由积分定义知 $\int_E f(x)\mathrm{d}x-\varepsilon\cdot m(E)\leqslant S_\Delta\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$. 根据 ε 的任意性,即得所证.

(4) 对 $\varepsilon>0$,取 n_0,使得$\frac{1}{n_0T}<\frac{\varepsilon}{2M}$,其中 $M=\int_0^T|f(x)|\mathrm{d}x$,则当 $n_0T<x\leqslant(n_0+1)T$ 时,有

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n_0T}\int_0^{n_0T} f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{x}\int_{n_0T}^x |f(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T |f(t)|\mathrm{d}t \cdot n_0\left|\frac{x - n_0T}{xn_0T}\right|$$

$$\leqslant \frac{M}{x} + M\frac{x - n_0T}{xT} < \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{T}{xT} < \varepsilon.$$

例 8 试证明下列命题:

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(E)=1$,$f(x)$在 E 上正值可积,且记 $A=\int_E f(x)\mathrm{d}x$,则

$$\sqrt{1 + A^2} \leqslant \int_E \sqrt{1 + f^2(x)}\mathrm{d}x \leqslant 1 + A.$$

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上非负可积,则

(i) $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^{\lambda}\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{\lambda}(x)\mathrm{d}x$ $(0<\lambda<1)$.

(ii) $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^{\lambda}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{\lambda}(x)\mathrm{d}x$ $(\lambda>1;\lambda<0)$.

(3) 设 $f\in L([0,1])$. 若 $\mathrm{e}^{\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x}=\int_{[0,1]}\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$,则 $f(x)=a$(常数), a.e. $x\in[0,1]$.

(4) 设 $f(x),g(x)$是$[0,\infty)$上非负递增函数,$\varphi(x),\psi(x)$是$[0,\infty)$上非负可测函数,则对 $a<b$,有

$$\left(\int_a^b f[\varphi(t)]g[\varphi(t)]\psi(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b\psi(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$\geqslant\left(\int_a^b f[\varphi(t)]\psi(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g[\varphi(t)]\psi(t)\mathrm{d}t\right).$$

证明 (1) 实际上,考查 $\varphi(x)=(1+x^2)^{1/2}$,易知 $\varphi(x)$是(下)凸函数. 根据 Jensen 不等式($w(x)\equiv1$),有$\left(A^2\leqslant\int_E f^2(x)\mathrm{d}x\right)$

$$\sqrt{1+A^2}\leqslant\left(1+\int_E f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}=\left(\int_E[1+f^2(x)]\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\int_E\sqrt{1+f^2(x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_E[1+f(x)]\mathrm{d}x=1+A.$$

(2) 令 $\varphi(t)=t^{\lambda}$,则 $\varphi''(t)=\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$. 注意在 $t\geqslant0$ 时,有 $\varphi''(t)<0$ $(0<\lambda<1)$;$\varphi''(t)>0(\lambda>1;\lambda<0)$.

(3) 注意 $\mathrm{e}^a(x-a)+\mathrm{e}^a\leqslant\mathrm{e}^x$,且等号成立当且仅当 $x=a$. 我们采用反证法. 假定结论不真,令 $a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则存在 $E\subset[0,1]$: $m(E)>0$,使得

$$\mathrm{e}^a[f(x)-a]+\mathrm{e}^a<\mathrm{e}^{f(x)}\quad(x\in E),$$
$$\mathrm{e}^a\int_0^1[f(x)-a]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^a<\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x.$$

注意到 $\int_0^1[f(x)-a]\mathrm{d}x=0$,故由上式可知

$$\mathrm{e}^{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^a<\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x.$$

这与题设矛盾. 证毕.

(4) 记 $\mathrm{d}\mu=\psi(t)\mathrm{d}t$，注意到 $f(x)$ 是非负递增函数，它可用阶梯函数逼近，因此只需考查特定情况：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant l_1,\\ 1, & x>l_1.\end{cases}$$

令 $A=\{t\in[a,b]:\ \varphi(t)\leqslant l_1\}$，$B=\{t\in[a,b]:\ \varphi(t)>l_1\}$，则问题归结为指出

$$\left(\int_B g[\varphi(t)]\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_a^b \mathrm{d}\mu\right)\geqslant\left(\int_a^b \mathrm{d}\mu\right)\left(\int_a^b g[\varphi(t)]\mathrm{d}\mu\right). \qquad (*)$$

类似地，为证(*)式，也只需考查 $g(x)=\begin{cases}0. & x\leqslant l_2,\\ 1, & x>l_2\end{cases}$ 的情形. 令 $C=\{t\in[a,b]:\ \varphi(t)\leqslant l_2\}$，$D=\{t\in[a,b]:\ \varphi(t)>l_2\}$，则在 $l_2\leqslant l_1$ 时，式(*)成为

$$\left(\int_B \mathrm{d}\mu\right)\left(\int_a^b \mathrm{d}\mu\right)\geqslant\left(\int_B \mathrm{d}\mu\right)\left(\int_D \mathrm{d}\mu\right),$$

这显然成立. 当 $l_2\geqslant l_1$ 时，只需换 f 为 g，即可得证.

特例：$f(x)=x^2$，$g(x)=x$，$\psi(x)\equiv1$，我们有

$$\frac{\int_a^b \varphi^2(t)\varphi(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t}\geqslant\frac{\int_a^b \varphi^2(t)\mathrm{d}t}{(b-a)}.$$

例 9 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$. 若对 $\mathbf{R}^1$ 上任意的有界可测函数 $\varphi(x)$，都有

$$\int_{\mathbf{R}^1} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0,$$

则 $f(x)=0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(2) 设 $f\in L(E)(E\subset\mathbf{R}^1)$，且 $0<A=\int_E f(x)\mathrm{d}x<+\infty$，则存在 E 中可测子集 e，使得

$$\int_e f(x)\mathrm{d}x=\frac{A}{3}.$$

(3) 设 $f\in L([0,\infty))$，$g(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可测. 若存在 $M>0$. 使得 $|g(x)/x|\leqslant M(0<x<+\infty)$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)g(t)\mathrm{d}t=0.$$

证明 (1) 依题设知,对任一有界可测集 $E\subset\mathbf{R}^1$: $m(E)>0$,均有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$. 由此不难得知结论成立.

(2) 设 $E_t=E\cap(-\infty,t)$,$t\in\mathbf{R}^1$,并记

$$g(t)=\int_{E_t}f(x)\mathrm{d}x,$$

则由积分绝对连续性可知,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要 $|\Delta t|<\delta$,就有

$$\begin{aligned}|g(t+\Delta t)-g(t)|&\leqslant\int_{E\cap[t,t+\Delta t)}|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{[t,t+\Delta t)}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $g\in C(\mathbf{R}^1)$. 因为 $g(x)$是递增函数,且有

$$\lim_{t\to-\infty}g(t)=0,\quad \lim_{t\to+\infty}g(t)=A,$$

而 $0<A/3<A$,所以根据连续函数中值定理可知,存在 t_0: $-\infty<t_0<+\infty$,使得 $g(t_0)=A/3$:

$$g(t_0)=\int_{E\cap(-\infty,t_0)}f(x)\mathrm{d}x=\frac{A}{3}.$$

令 $e=E\cap(-\infty,t_0)$,即得所证.

(3) 由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N_1,使得$\int_{N_1}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon/2M$. 又存在 N_2,使得

$$\frac{1}{x}MN_1\cdot\int_1^{N_1}|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}\quad(x>N_2).$$

从而当 $x>\max\{N_1,N_2\}$时,就有

$$\begin{aligned}\left|\int_1^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|&\leqslant M\int_1^x t|f(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant MN_1\int_1^{N_1}|f(t)|\mathrm{d}t+Mx\int_{N_1}^x|f(t)|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left|\int_1^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|&\leqslant\frac{MN_1}{x}\int_1^{N_1}|f(t)|\mathrm{d}t+M\int_{N_1}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

例 10 试证明下列命题：

(1) 设 $g(x)$ 是 E 上的可测函数，若对任意的 $f\in L(E)$，都有 $f\cdot g\in L(E)$，则除一个零测集 Z 外，$g(x)$ 是 $E\setminus Z$ 上的有界函数.

(2) 设函数 $f(x)\in L([a,b])$. 若对任意的 $c\in[a,b]$ 有 $\int_{[a,c]}f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=0$, a. e. $x\in[a,b]$.

(3) 设 $f\in L([a,b])$，$I_k\subset[a,b]$ $(k\in\mathbf{N})$ 是区间列. 若存在 $\lambda>0$，使得

$$\int_{I_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\lambda|I_k|\quad(k\in\mathbf{N}),$$

则

$$\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k}|f(x)|\leqslant 2\lambda\left|\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right|.$$

证明 (1) 事实上，如果结论不成立，那么一定存在自然数子列 $\{k_i\}$，使得

$$m(\{x\in E:\ k_i\leqslant|g(x)|<k_{i+1}\})=m(E_i)>0\ (i=1,2,\cdots).$$

现在作函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sign}g(x)}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}, & x\in E_i,\\ 0, & x\overline{\in}E_i.\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots)$$

因为

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)|\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f(x)|\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}m(E_i)<+\infty,\end{aligned}$$

所以 $f\in L^1(E)$，但我们有

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i}{i^{1+(1/2)}\cdot m(E_i)}m(E_i)=\infty,$$

这说明 $f\cdot g\overline{\in}L(E)$，矛盾.

(2) 若结论不成立，则存在 $E\subset[a,b]$，$m(E)>0$ 且 $f(x)$ 在 E 上的值不等于零. 不妨假定在 E 上 $f(x)>0$. 作闭集 F，$F\subset E$ 且 $m(F)>0$，

并令 $G=(a,b)\setminus F$，我们有

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x+\int_F f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

因为 $\int_F f(x)\mathrm{d}x>0$，所以

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_{[a_n,b_n]} f(x)\mathrm{d}x=\int_G f(x)\mathrm{d}x\neq 0,$$

其中 $\{(a_n,b_n)\}$ 为开集 G 的构成区间，从而存在 n_0，使得

$$\int_{[a_{n_0},b_{n_0}]} f(x)\mathrm{d}x\neq 0.$$

由此可知

$$\int_{[a,a_{n_0}]} f(x)\mathrm{d}x\neq 0 \quad 或 \quad \int_{[a,b_{n_0}]} f(x)\mathrm{d}x\neq 0,$$

这与假设矛盾，从而结论成立.

(3) 由积分的绝对连续性可知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $e\subset[a,b]$ 且 $m(e)<\delta$ 时，有 $\int_e |f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$.

现在，选取 $I_1,I_2,\cdots,I_{n_0}$，使得

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{n_0} I_k\Big)\geqslant m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big)-\delta,$$

且要求 $[a,b]$ 中不存在点同时属于 $I_i(i=1,2,\cdots,n_0)$ 中的三个. 从而我们有

$$\begin{aligned}\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k}|f(x)|\mathrm{d}x&=\int_{(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k)\setminus(\bigcup_{k=1}^{n_0} I_k)}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\bigcup_{k=1}^{n_0} I_k}|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\varepsilon+\sum_{k=1}^{n_0}\int_{I_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon+\lambda\sum_{k=1}^{n_0}|I_k|\leqslant\varepsilon+2\lambda\cdot m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to\infty$ 即得所证.

例 11 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L([0,1])$，且有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，则存在 $[0,1]$ 上的可测函数 $g(x)$，使得

$$\int_0^1|f(x)g(x)|\mathrm{d}x<+\infty,\quad \int_0^1|f(x)g^2(x)|\mathrm{d}x=+\infty.$$

(2) 设 $f\in C^{(1)}([0,1])$，$g\in C^{(1)}([0,1])$. 若有 $m(f^{-1}(0))=0$，$g(x)\geqslant 0(0\leqslant x\leqslant 1)$，则

$$I=\int_0^1 g(x)(|f(x)|)'\mathrm{d}x=-\int_0^1|f(x)|g'(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 在 $[0,1]$ 中选取互不相交闭区间列 $\{I_n\}$，并令 $\int_{I_n}|f(x)|\mathrm{d}x=a_n>0(n\in\mathbf{N})$，易知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$. 不妨假定 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}<+\infty$（否则可取子列），且作 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1/2}\cdot\chi_{I_n}(x)$，我们有

$$\int_0^1|f(x)g(x)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_n}|f(x)|\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}<+\infty,$$

$$\int_0^1|f(x)|g^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_n}|f(x)|\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}1=+\infty.$$

(2) 令 $(0,1)\setminus f^{-1}(0)=G$，易知 G 是开集，故可令 $G=\bigcup_{n\geqslant 1}(a_n,b_n)$（构成区间之并）. 我们有

$$I=\left(\int_{f^{-1}(0)}+\sum_{n\geqslant 1}\int_{a_n}^{b_n}\right)g(x)(|f(x)|)'\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 1}\int_{a_n}^{b_n}g(x)(|f(x)|)'\mathrm{d}x.$$

记 $c_n=(a_n+b_n)/2(n\in\mathbf{N})$，并注意到对每个 n，有 $f(x)\neq 0(a_n<x<b_n)$，故 $f(x)$ 或为正值或为负值，因此可写成

$$(|f(x)|)'=\operatorname{sign}f(c_n)\cdot f'(x)\quad(a_n<x<b_n).$$

从而推出（注意 $f(a_n)=f(b_n)=0$）

$$\begin{aligned}I&=\sum_{n\geqslant 1}\operatorname{sign}f(c_n)\cdot\int_{a_n}^{b_n}g(x)f'(x)\mathrm{d}x\\&=-\sum_{n\geqslant 1}\operatorname{sign}f(c_n)\int_{a_n}^{b_n}f(x)g'(x)\mathrm{d}x\\&=-\sum_{n\geqslant 1}\int_{a_n}^{b_n}|f(x)|g'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1|f(x)|g'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 12 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L([0,\infty))$，则 $\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0$，a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(2) 设 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，$K\subset\mathbf{R}^n$ 是紧集，则

$$\lim_{|y|\to+\infty}\int_{K+\{y\}}|f(x)|\mathrm{d}x=0\quad\left(|y|=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{1/2}\right).$$

(3) 设 $I\subset\mathbf{R}^1$ 是区间，$f\in L(I)$，$a\neq 0$. 若令

$$J=\{x/a:\ x\in I\}=I/a,\quad g(x)=f(ax)\quad(x\in J),$$

则 $g\in L(J)$，且有 $\int_I f(x)\mathrm{d}x=|a|\int_J f(ax)\mathrm{d}x$.

证明 (1) 因为 $f(x+n)=f(x+1+(n-1))$，所以只需考查 $[0,1]$ 中的点即可. 为证此，又只需指出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|$ 在 $[0,1]$ 几乎处处收敛即可. 应用积分的手段：由于

$$\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}|f(x+n)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[n,n+1]}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{[1,\infty)}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty,$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+n)|$ 作为 x 的函数是在 $[0,1]$ 上可积的，因而是几乎处处有限的，即级数是几乎处处收敛的.

(2) 由题设知 $\lim_{r\to+\infty}\int_{|x|\geqslant r}|f(x)|\mathrm{d}x=0$. 令 $\delta=\sup_{x\in K}\{|x|\}$，则

$$\int_{K+\{y\}}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{\{x:\ |x|\geqslant|y|-\delta\}}|f(x)|\mathrm{d}x\to 0\quad(|y|\to+\infty).$$

(3) (i) 若 $f(x)=\chi_E(x)$，E 是 I 中的可测集，则 $a^{-1}E\subset J$. 由于 $\chi_E(ax)=\chi_{a^{-1}E}(x)$，故有

$$\int_J g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|a|}m(E)=\frac{1}{|a|}\int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

由此可知当 $f(x)$ 是简单可测函数时，结论也真.

(ii) 对 $f\in L(I)$，设简单可测函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，使得 $\varphi_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty,x\in I)$，且 $|\varphi_n(x)|\leqslant|f(x)|$ $(n=1,2,\cdots,x\in I)$，则令 $\psi_n(x)=\varphi_n(ax)$ $(x\in J,n=1,2,\cdots)$，$\psi_n(x)\to g(x)$ $(n\to\infty,x\in J)$，我们有

$$|a|\int_J g(x)\mathrm{d}x=|a|\lim_{n\to\infty}\int_J\psi_n(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_I\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

例 13 解答下列问题：

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，$g\in L(\mathbf{R}^1)$，且有 $\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^1}g(x)\mathrm{d}x=1$，试证明对任意的 $r\in(0,1)$，存在 $\mathbf{R}^1$ 中可测集 E，使得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x=r.$$

(2) 试求 $f\in L([0,1])$，它满足条件：对于 $[0,1]$ 中任一满足 $m(E)=1/2$ 的可测集 E，都有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可测. 若对 $(0,\infty)$ 中任意的满足 $m(E)=1$ 与 $m(E)=\sqrt{2}$ 的可测集，均有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=0$，a.e. $x\in(0,\infty)$.

证明 (1) 令 $A=\{x\in\mathbf{R}^1: f(x)>g(x)\}$，$B=\mathbf{R}^1\setminus A$，以及 $A_t=(-\infty,t)\cap A$，$B_t=(-\infty,t)\cap B$，又记

$$\varphi(t)=\int_{A_t}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,\quad \psi(t)=\int_{B_t}[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x,$$

易知 $\varphi(x)$，$\psi(t)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的非负连续函数，且有

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi(t)=\lim_{t\to-\infty}\psi(t),\quad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\lim_{t\to+\infty}\psi(t).$$

从而对 $t\in\mathbf{R}^1$，存在 $\lambda=\lambda(t)$，使得 $\varphi(t)=\psi(\lambda)$. 又令 $C_t=A_t\cup B_t$ $(t\in\mathbf{R}^1)$，则 $C_t\subset C_s$ $(t\leqslant s)$，且有

$$\lim_{s\to t+}m(C_s)=m(C_t).$$

因此，$h(t)\triangleq\int_{C_t}f(x)\mathrm{d}x=\int_{C_t}g(x)\mathrm{d}x$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上连续函数. 由 $\lim\limits_{t\to-\infty}C_t=\varnothing$，$\lim\limits_{t\to+\infty}C_t=\mathbf{R}^1$，可知 $h(t)$ 含有从 0 到 1 的所有数值. 这说明对 $r\in(0,1)$，存在 $t_0\in\mathbf{R}^1$，使得 $h(t_0)=r$，$E=C_{t_0}$.

(2) (i) 对满足 $m(E_1)=m(E_2)\leqslant 1/2$ 的 $[0,1]$ 中可测子集 E_1,E_2，因为有

$$m(([0,1]\setminus E_1)\setminus E_2)\geqslant 1-2m(E_1)\geqslant 1/2-m(E_1),$$

所以可取 $([0,1]\setminus E_1)\setminus E_2$ 中可测子集 E，使得 $m(E)=1/2-m(E_1)$. 从而令 $A_1=E\cup E_1$，$A_2=E\cup E_2$，则

$$m(A_1)=m(A_2)=1/2,\quad \int_{A_1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{A_2}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

由此即知 $\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 根据(i)的结论,我们有

$$\int_0^{1/n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1/n}^{2/n} f(x)\mathrm{d}x = \cdots = \int_{(n-1)/n}^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n}\left(\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 f(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n}.$$

令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$,我们有

$$F\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{n=1}^m \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

从而对 $x \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$,有 $F(x) = x$. 由 $F(x)$ 的连续性,可知 $F(x) = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. 又由 $F'(x) = 1\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 得到 $f(x) = 1$, a. e. $x \in [0,1]$.

(3) 因为 $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$,所以对 $a > 0$,存在 $k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}$,使得

$$0 < (\sqrt{2} - 1)^k = k + n\sqrt{2} < a.$$

由此知 $\{k + n\sqrt{2}\}\,(k, n \in \mathbf{Z})$ 在 $(0, \infty)$ 中稠密.

现在,对满足 $m(E) = k + n\sqrt{2}$ 的任一可测集 $E \subset (0, \infty)$:

(i) 若 $k \geqslant 0, n \geqslant 0$,则有分解 $E = E_1 \cup E_2$,使得

$$m(E_1) = k, \quad m(E_2) = n\sqrt{2}; \quad E_1 \cap E_2 = \varnothing;$$

$$\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 若 $k > 0, n < 0$,则存在 E_1, E_2: $E_1 \supset E_2$,使得

$$E = E_1 \setminus E_2, \quad m(E_1) = k, \quad m(E_2) = n\sqrt{2}; \quad \int_E f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

....

最后,对任一正测集 E,作 $\{E_i\}$:

$$m(E_i) = k_i + n_i\sqrt{2}\ (k_i, n_i \in \mathbf{Z}), \quad \lim_{i\to\infty} m(E_i) = m(E),$$

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

这说明 $f(x) = 0$, a. e. $x \in (0, \infty)$.

例 14 设$\int_0^1 |f_n(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant M (n\in\mathbf{N})$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$，a. e. $x\in[0,1]$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x=0$.

证明 依题设知，对任给 $\varepsilon>0$，存在可测子集 $E\subset[0,1]$，使得 $m([0,1]\setminus E)<\varepsilon$，$f_n(x)$在 E 上一致收敛于 0. 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x &= \int_{[0,1]\setminus E} |f_n(x)|\mathrm{d}x + \int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{[0,1]\setminus E} |f_n(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}(m([0,1]\setminus E))^{1/2} + \int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sqrt{M}(m([0,1]\setminus E))^{1/2} + \int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sqrt{M\varepsilon} + \int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{M\varepsilon}$. 由 ε 的任意性，即得所证.

§ 4.3 控制收敛定理

基 本 内 容

定理 1(控制收敛) 设 $f_k\in L(E)$ $(k=1,2,\cdots)$，且有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$，a. e. $x\in E$. 若存在 E 上的可积函数 $F(x)$，使得

$$|f_k(x)| \leqslant F(x),\quad \text{a.e. } x\in E\ (k=1,2,\cdots),$$

则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{$*$}$$

(通常称 $F(x)$为函数列$\{f_k(x)\}$的控制函数)

注意 (i) 上述定理实际上包含了更强的结论：

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0. \tag{$**$}$$

今后，我们将称式($**$)为 $f_k(x)$在 E 上依 L^1 的意义收敛于 $f(x)$. 一般来说，式($*$)不能推出($**$)成立(在非负情形有例外).

此外，当式($**$)成立时，也不一定有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$，a. e. $x\in E$.

不过可以得出 $f_k(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$的结论. 由此，进一步又可知，

存在子列$\{f_{k_i}(x)\}$，使得$\lim\limits_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x)$，a.e. $x\in E$.

(ii) 上述控制收敛定理的一个特例是有界收敛定理：

"设$\{f_k(x)\}$是E上的可测函数列，$m(E)<\infty$，且对$x\in E$有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad |f_k(x)|\leqslant M\quad(k=1,2,\cdots),$$

则$f\in L(E)$且$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$."

定理 2(依测度收敛型控制收敛) 设$f_k\in L(\mathbf{R}^n)$ $(k=1,2,\cdots)$，且$f_k(x)$在$\mathbf{R}^n$上依测度收敛于$f(x)$. 若存在$F\in L(\mathbf{R}^n)$，使得$|f_k(x)|\leqslant F(x)$ $(k=1,2,\cdots;\text{a.e. }x\in\mathbf{R}^n)$，则$f\in L(\mathbf{R}^n)$，且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}f_k(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{d}x.$$

注 对于E上依测度收敛于$f\in L(E)$的非负可积函数列$\{f_k(x)\}$而言，若有$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$，则必有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

推论(逐项积分) 设$f_k\in L(E)$ $(k=1,2,\cdots)$. 若有$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k(x)|\mathrm{d}x<\infty$，则$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$在$E$上几乎处处收敛；若记其和函数为$f(x)$，则$f\in L(E)$且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3(积分号下求导) 设$f(x,y)$是定义在$E\times(a,b)$上的函数，它作为x的函数在E上是可积的，作为y的函数在(a,b)上是可微的，若存在$F\in L(E)$，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\right|\leqslant F(x),\quad (x,y)\in E\times(a,b),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_E f(x,y)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

注 注意下列例证及命题：

(i) 在$[0,1]$上定义函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1/n],\\ n^2, & x\in(1/n,2/n),\\ 0, & x\in[2/n,1],\end{cases}$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\equiv 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=+\infty$.

(ii) 易知，对$n\in\mathbf{N}$，存在k,i，使得

$$n = 2^k + i \quad (0 \leqslant i < 2^k, k \in \mathbf{N}).$$

在[0,1]上作函数列

$$f_n(x) = \chi_{[i/2^k,(i+1)/2^k)}(x) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in [0,1]),$$

则对任意的 $x \in [0,1]$，$f_n(x)$均不收敛于 $f(x) \equiv 0$，但有

$$\lim_{n \to 0} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0.$$

(iii) 设 $f_k \in L(E)$ $(k=1,2,\cdots)$，且 $f_k(x)$在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 若 $m(E) < \infty$，则 $\lim\limits_{k \to \infty} \int_E f_k(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x)$.

证明 (i)，(ii)略. (iii) 因为对任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in E, k \geqslant N),$$

所以根据有界收敛定理可知

$$\lim_{k \to \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x = \int_E \lim_{k \to \infty} |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0.$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $f \in L(\mathbf{R}^1)$，在 $\mathbf{R}^1$ 上作函数列

$$g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x), \quad h_n(x) = \min\{f(x), n\} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

则 $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}^1} |g_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0$，$\lim\limits_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}^1} |h_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0$.

(2) 设 $f \in L(E)$，则 $\lim\limits_{k \to \infty} \int_{\{x \in E:\ |f(x)| < 1/k\}} |f(x)| \mathrm{d}x = 0$.

(3) 设 $f \in L([0,1])$，则

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_{[0,1]} n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

(4) 设$\{E_k\}$是递增可测集合列，且 $\lim\limits_{k \to \infty} E_k = E$，又在 E 上定义的 $f(x)$满足 $f \in L(E_k)$ $(k \in \mathbf{N})$. 若 $\lim\limits_{k \to \infty} \int_{E_k} |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty$，则$f \in L(E)$，且有

$$\int_E f(x) \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{E_k} f(x) \mathrm{d}x.$$

证明 (1) 易知$|g_n(x)| \leqslant |f(x)|$，$|h_n(x)| \leqslant |f(x)|$ $(n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}^1)$，且有

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R}^1),$$

因此根据控制收敛定理,即得所证.

(2) 令 $E_k = \{x \in E: |f(x)| < 1/k\}$. 因为有 $|f(x)|\chi_{E_k}(x) < 1/k (x \in E)$,所以 $|f(x)|\chi_{E_k}(x) \to 0 (k\to\infty, x\in E)$. 注意到 $|f(x)|$ 是 $\{|f(x)|\chi_{E_k}(x)\}$ 的控制函数,故有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(3) 注意到 $\ln(1+x^2) \leqslant x (0 \leqslant x)$,故我们有 $n\ln(1+|f(x)|^2/n^2) \leqslant n \cdot |f(x)|/n = |f(x)| (0 \leqslant x \leqslant 1)$. 从而由控制收敛定理可得

$$I = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

(4) 因为 $\{|f(x)|\chi_{E_k}(x)\}$ 是递增列且在 E 上收敛于 $|f(x)|$,所以

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

例 2 试证明下列命题:

(1) 设 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots, E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, f \in L(E_k)\ (k \in \mathbf{N})$,则

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f_k \in L(E)$,且 $f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x) (k \in \mathbf{N})$. 若有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\ (x \in E), \quad \left|\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\ (k \in \mathbf{N}),$$

则 $f \in L(E)$,且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$, $g(x)$ 是 E 上有界可测函数,则

$$I = \lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)g(x) - f(x)g(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

(4) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上非负可积函数列,且 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x) \equiv 0$. 若有

$$\int_E \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}\mathrm{d}x \leqslant M \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则 $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = 0$.

证明 (1) 注意 $f(x)\chi_{E_k}(x)\to f(x)\chi_E(x)\ (k\to\infty)$，而 $|f(x)|\chi_{E_1}(x)$是控制函数.

(2) 因为$\{f_k(x)-f_1(x)\}$是非负渐升列且收敛于 $f(x)-f_1(x)$，所以

$$\int_E[f(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E[f_k(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x \leqslant 2M.$$

由此即得所证.

(3) 假定$|g(x)|\leqslant M(x\in E)$，我们有

$$I=\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\,|g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\lim_{k\to\infty}M\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

(4) 令 $F_k(x)=\max\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)\}$，我们有 $0\leqslant F_k(x)\leqslant F_{k+1}(x)(k\in\mathbf{N})$. 若记 $F_k(x)\to F(x)(k\to\infty)$，则

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E F_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M,\quad F\in L(E).$$

从而得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x = 0.$$

例 3 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([0,\infty))$且 $f(x)\to l(x\to+\infty)$，则对任意的 $A>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,A]}f(nx)\mathrm{d}x = Al.$$

(2) 设 $f(x),f_k(x)(k\in\mathbf{N})$是 E 上可测函数. 若有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x) = f(x),\ \text{a.e.}\ x\in E,\quad |f_k(x)|\leqslant F(x),\ F\in L(E),$$

则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $e\subset E$: $m(e)<\varepsilon$，使得 $f_k(x)$在 $E\setminus e$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(3) 设$\{f_k(x)\}$，$\{g_k(x)\}$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的两个可测函数列，且有 $|f_k(x)|\leqslant g_k(x)\ (x\in E,k\in\mathbf{N})$，$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$，$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)$，以及

$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

则 $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

(4) 设 $f_k\in L(E)(k\in\mathbf{N})$，$f\in L(E)$. 若 $\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$，a. e. $x\in E$，则 $\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$ 的充分必要条件是：

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

(5) 设 $f_n\in L([0,1])$ $(n=1,2,\cdots)$，$F\in L([0,1])$. 若有

(i) $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ $(n=1,2,\cdots,\ x\in[0,1])$；

(ii) 对任意的 $g\in C([0,1])$，$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，

则对任意的可测集 $E\subset[0,1]$，有 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

证明 (1) 易知存在 $X>0$，使得 $|f(x)|<l+1$ $(x\geqslant X)$. 注意到 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上有界，故存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ $(0\leqslant x<\infty)$. 根据有界收敛定理，可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,A]} f(nx)\mathrm{d}x = \int_{[0,A]}\lim_{n\to\infty}f(nx)\mathrm{d}x = lA.$$

(2) 对任给 $\varepsilon>0$，令 $E_k(\varepsilon)=\{x\in E:\ |f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$，只需指出 $\lim_{j\to\infty}m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=0$. 注意到 $E_k(\varepsilon)\subset\{x\in E:\ F(x)\geqslant\varepsilon/2\}(k\in\mathbf{N})$，故知 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)<+\infty$. 从而由 $m(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k)=0$ 即可得证.

(3) 注意到 $\{g_k(x)-f_k(x)\}$，$\{g_k(x)+f_k(x)\}$ 均为非负可积函数列，故得

$$\begin{aligned}\int_E[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x &\leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\left(\int_E g_k(x)\mathrm{d}x - \int_E f_k(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_E g(x)\mathrm{d}x - \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_E[g(x)+f(x)]\mathrm{d}x &\leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\left(\int_E g_k(x)\mathrm{d}x + \int_E f_k(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_E g(x)\mathrm{d}x + \underline{\lim_{k\to\infty}}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此可知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x, \quad \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

即得所证.

(4) **必要性** 由 $||f_k(x)|-|f(x)|| \leqslant |f_k(x)-f(x)|$ 即知结论成立.

充分性 因为我们有 $|f_k(x)-f(x)| \leqslant |f_k(x)|+|f(x)|$，以及

$$\lim_{k\to\infty}\int_E (|f_k(x)| + |f(x)|)\mathrm{d}x = 2\int_E |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty,$$

所以由(3)可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$.

(5) 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $m(e)<\delta$ 时，有 $\int_e F(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$. 现在对可测集 $E\subset[0,1]$，可作紧集 K 与开集 G：$K\subset E\subset G$，$m(G\setminus K)<\delta$；又存在 $g\in C([0,1])$，使得

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \overline{\in} G, \end{cases} \quad 0 \leqslant g(x) \leqslant 1 \quad (x \in [0,1]).$$

从而我们有

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\right| &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^1 f_n(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\left|\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^1 f_n(x)[\chi_E(x) - g(x)]\mathrm{d}x\right|\right) \\
&\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\left|\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x\right| + \int_0^1 F(x)\chi_{G\setminus K}(x)\right) \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

例 4 试证明下列命题：

(1) 设 $f_n\in C^{(1)}((a,b))$ $(n=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = F(x), \quad x \in (a,b).$$

若存在 $f'(x)$，$F(x)$ 在 (a,b) 上连续，则 $f'(x)=F(x)$，$x\in(a,b)$.

(2) 设 $f\in C([a,b])$，$\varphi\in C([a,b])$，$F\in L([a,b])$，且对 $x\in[a,b]$，有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x), \quad \varphi_n \in C^{(1)}([a,b]) \quad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_n(x) = f(x)\varphi_n(x),$$

$$|f(x)\varphi_n(x)| \leqslant F(x) \quad (n \in \mathbf{N}, x \in [a,b]),$$

则 $\varphi'(x) = f(x)\varphi(x),\ x \in [a,b]$.

证明 (1) 只需指出在(a,b)的一个稠密子集上有 $f'(x)=F(x)$ 即可. 为此,任取(a,b)中的子区间$[c,d]$,且记

$$E_n = \{x \in [c,d]:\ |f_k'(x) - F(x)| \leqslant 1, k \geqslant n\},$$

易知每个 E_n 皆闭集,且$[c,d]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 从而根据 Baire 定理(见第一章 §1.2 中 1.2.3)可知,存在 n_0 以及区间$[c',d']$,使得 $E_{n_0}\supset[c',d']$. 由于

$$|f_k'(x) - F(x)| \leqslant 1 \quad (k \geqslant n_0),\ x \in [c',d'],$$

故知当 $k\geqslant n_0$ 时,$\{f_k'(x)\}$在$[c',d']$上一致有界. 这样,由等式

$$\int_{[c',x]} f_k'(t)\mathrm{d}t = f_k(x) - f_k(c'),\quad c' < x < d'$$

可知(有界收敛定理)

$$\int_{[c',x]} F(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(c'),\quad c' < x < d'.$$

在等式两端对 x 求导可得

$$F(x) = f'(x),\quad c' < x < d'.$$

即得所证.

(2) 由题设知 $\varphi_n(t)-\varphi_n(a)=\int_a^t f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\,(n\in\mathbf{N},a\leqslant t\leqslant b)$,令 $n\to\infty$可得(根据控制收敛定理)

$$\varphi(t) - \varphi(a) = \int_a^t f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)\varphi(t)\quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在 E 上可测,$m(E)<+\infty$,则 $f^k\in L(E)(k\in\mathbf{N})$且存在极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f^k(x)\mathrm{d}x$ 的充分必要条件是:$|f(x)|\leqslant 1$,a. e. $x\in E$.

(2) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$. 若对任一开集 $G\subset\mathbf{R}^1$,有

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \int_{\bar{G}} f(x)\mathrm{d}x,$$

则 $f(x)=0$,a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(3) 设 $f_n\in L(\mathbf{R}^1)(n=1,2,\cdots)$,$f\in L(\mathbf{R}^1)$,且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

若存在 $E\subset\mathbf{R}^1, E_n\subset\mathbf{R}^1(n=1,2,\cdots)$：$m(E_n\triangle E)\to 0\ (n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 充分性 假定 $|f(x)|\leqslant 1$, a. e. $x\in E$，则 $|f^k(x)|\leqslant 1$, a. e. $x\in E$. 令 $\lim\limits_{k\to\infty}f^k(x)=f(x)$, a. e. $x\in E$，由控制收敛定理即得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f^k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

必要性 反证法. 令 $A=\{x\in E:|f(x)|>1\}$，假定 $m(A)>0$，则 $A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j(E_j=\{x\in E:|f(x)|\geqslant 1+1/j\})$，且存在 $\delta>1$，使得 $m(E_\delta)>0(E_\delta=\{x\in E:|f(x)|>\delta\})$. 因为有 $f^{2k}(x)\geqslant\delta^{2k}\chi_{E_\delta}(x)$，所以 $\delta^{2k}m(E_\delta)=\int_E\delta^{2k}\chi_{E_\delta}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f^{2k}(x)\mathrm{d}x$. 由此得 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f^{2k}(x)\mathrm{d}x=+\infty$，这与题设矛盾.

(2) 对任一闭区间 J 以及 $n\in\mathbf{N}$，在 J 中可作类 Cantor 集 $H_{J,n}$，使得 $m(H_{J,n})>|J|-1/n(n\in\mathbf{N})$. 令 $G_n=J\setminus H_{J,n}$，则 G_n 是开集且 $\overline{G}_n=J$. 因为 $m(G_n)\to 0(n\to\infty)$，所以我们有

$$\int_{G_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\overline{G}_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_J f(x)\mathrm{d}x.$$

由此知 $\int_J f(x)\mathrm{d}x=0$，根据 J 的任意性可知，$f(x)=0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(3) (i) 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $m(e)<\delta$ 时有 $\int_e|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 又由题设知，存在 N_1,N_2，使得

$$\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon\ (n\geqslant N_1),\quad m(E_n\triangle E)<\delta\ (n\geqslant N_2).$$

(ii) 当 $n\geqslant N_1+N_2$ 时，我们有

$$\left|\int_{E_n}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)\chi_{E_n}(x)-f(x)\chi_E(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)||\chi_{E_n}(x)-\chi_E(x)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\mathbf{R}^1}|\chi_E(x)||f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{E_n\triangle E}|f_n(x)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<2\varepsilon.$$

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x),g(x)$在$[0,\infty)$上局部可积，且有

$$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^t g(x)\mathrm{d}x\quad(0<t<+\infty).$$

若 $\varphi(x)$是在$[0,\infty)$上的非负递减函数，且 $f\cdot\varphi\in L([0,\infty)),g\cdot\varphi\in L([0,\infty))$，则

$$\int_0^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上正值递增函数，$\{g_n(x)\}$是 $I=[0,1]$上的实值可测函数列. 若有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=0,\quad\int_0^1 f[|g_n(x)|]\mathrm{d}x\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots),$$

以及 $g_n(x)\to g(x)$ $(n\to\infty,\ \text{a.e.}\ x\in[0,1])$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|g_n(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证明 (1) 若 $\varphi(x)$是简单函数：$\varphi(x)=\sum_{k=1}^N c_k\chi_{(0,t_k)}(x)$：$c_k>0(k=1,2,\cdots,N)$，$t_1<t_2<\cdots<t_N$，我们有

$$\int_0^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^N c_k\int_0^{t_k}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^N c_k\int_0^{t_k}g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\varphi(x)$是递减的有界函数时，则存在简单函数递减列$\{\psi_m(x)\}$，它在任一区间$[0,a]$上一致收敛于 $\varphi(x)$，故可得

$$\int_0^a f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\int_0^a f(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\int_0^a g(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x=\int_0^a g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

最后，对非负递减的 $\varphi(x)$，令 $\psi_n(x)=\min\{\varphi(x),n\}(n\in\mathbf{N})$，则

$$\int_0^a f(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a g(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x \ (a>0).$$

从而根据控制收敛定理，可得

$$\int_0^a f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

令 $a\to+\infty$，即得所证.

(2) (i) 记 $\sup\limits_{x\geqslant N}\{x/f(x)\}=A_N$，我们有

$$\begin{aligned}\int_I |g_n(x)|\mathrm{d}x &= \left\{\int_{\{x\in I:\ |g_n(x)|\geqslant N\}} + \int_{\{x\in I:\ |g_n(x)|<N\}}\right\}|g_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\{x\in I:\ |g_n(x)|\geqslant N\}} \frac{|g_n(x)|}{f[|g_n(x)|]} f[|g_n(x)|]\mathrm{d}x + N\cdot|I| \\ &\leqslant A_N\cdot M+N.\end{aligned}$$

这说明 $g_n\in L([0,1])(n\in\mathbf{N})$.

(ii) 我们有

$$\begin{aligned}\int_I |g_n(x)-g_m(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\{x\in I:\ |g_n(x)-g_m(x)|/2\leqslant N\}} |g_n(x)-g_m(x)|\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\{x\in I:\ |g_n(x)-g_m(x)|/2>N\}} 2\cdot\frac{|g_n(x)-g_m(x)|}{2}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{记为}} J_1+J_2.\end{aligned}$$

由 $f(x)$的递增性，可知

$$\begin{aligned}f(|g_n(x)-g_m(x)|/2) &\leqslant f(\max\{|g_n(x)|,|g_m(x)|\}) \\ &\leqslant f(|g_n(x)|)+f(|g_m(x)|).\end{aligned}$$

从而可得(对任给 $\varepsilon>0$)

$$\begin{aligned}J_2 &= 2\int_{\{x\in I:\ |g_n(x)-g_m(x)|/2>N\}} \frac{|g_n(x)-g_m(x)|/2}{f(|g_n(x)-g_m(x)|/2)} \\ &\quad \cdot f(|g_n(x)-g_m(x)|/2)\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\cdot A_N\int_{\{x\in I:\ |g_n(x)-g_m(x)|/2>N\}} [f(|g_n(x)|)+f(|g_m(x)|)]\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\cdot A_N\cdot 2M<\varepsilon \quad (\text{存在 } N, \text{使得 } A_N<\varepsilon/4M).\end{aligned}$$

再对 J_1 应用有界收敛定理，即得所证.

例 7 试证明下列命题：

(1) 设 $f_k\in L(\mathbf{R}^n)(k\in\mathbf{N})$，$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^n$. 若存在

$F\in L(\mathbf{R}^n)$，使得$|f(x)|\leqslant F(x)(x\in\mathbf{R}^n)$，且令

$$h_k(x)=\mathrm{mid}\{-F(x),f_k(x),F(x)\}$$

（即取中间之值），则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1}h_k(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $E_k\subset\mathbf{R}^n(k\in\mathbf{N})$是可测集，$m(E_k)\to0(k\to\infty)$. 若 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=0$.

(3) 设 $f_0(x),f_n(x)(n\in\mathbf{N})$是$[0,1]$上非负可积函数. 若$f_n(x)$在$[0,1]$上依测度收敛于 $f_0(x)$，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f_0(x)\mathrm{d}x,$$

则对$[0,1]$中任一可测集 E，均有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f_0(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 设$\{f_k(x)\}$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数列，且 $m(E)<\infty$，则$\{f_k(x)\}$依测度收敛于零（函数）的充分必要条件是：

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}\mathrm{d}x=0.$$

证明 (1) (i) 易知 $\max\{-F(x),\min\{f_k(x),F(x)\}\}$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，且由等式

$$\mathrm{mid}\{a,b,c\}=\max\{\min(a,b),\min(b,c),\min(a,c)\},$$

可知 $h_k(x)=\max\{-F(x),\min\{f_k(x),F(x)\}\}$，且$|h_k(x)|\leqslant F(x)$ $(x\in\mathbf{R}^n)$.

(ii) 注意到：若 $a_k\to a(k\to\infty)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\max\{a_k,b\}=\max\{a,b\},\quad \lim_{k\to\infty}\min\{a_k,b\}=\min\{a,b\}.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}h_k(x)&=\lim_{k\to\infty}\max\{-F(x),\min\{f_k(x),F(x)\}\}\\&=\max\{-F(x),\lim_{k\to\infty}\min\{f_k(x),F(x)\}\}\\&=\max\{-F(x),\min\{f(x),F(x)\}\}\\&=\mathrm{mid}\{-F(x),f(x),F(x)\}.\end{aligned}$$

由此知 $\lim\limits_{k\to\infty}h_k(x)=f(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^n$，再根据控制收敛定理，即可得证.

(2) 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$，所以 $\chi_{E_k}(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上依测度收敛于 0. 从而又知 $f(x)\chi_{E_k}(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上依测度收敛于 0. 注意到 $|f(x)\chi_{E_k}(x)|\leqslant|f(x)|(x\in\mathbf{R}^n,k\in\mathbf{N})$，故根据控制收敛定理可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\lim_{k\to\infty}f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x=0$$

(注意 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x)\chi_{E_k}(x)=0$，a. e. $x\in\mathbf{R}^n$).

(3) 依题设知 $\sup\limits_{n\geqslant 0}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=M<+\infty$. 对任给 $\varepsilon>0$ 以及 δ：$0<\delta<\varepsilon/2M$，作点集 $E_\varepsilon=\{x\in E: |f_n(x)-f_0(x)|\geqslant\varepsilon\}$，则存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $m(E_\varepsilon)<\delta$，且有

$$\int_E|f_n(x)-f_0(x)|\mathrm{d}x=\left(\int_{E_\varepsilon}+\int_{E\setminus E_\varepsilon}\right)|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x.$$

注意到当 $n\geqslant N$ 时，上式右端第一项小于等于 $2\delta M<\varepsilon$；第二项小于等于 $\varepsilon\cdot m(E)<\varepsilon$，即得所证.

(4) 注意到第三章 § 3.2 中例 11 之(2)，可知 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 0 当且仅当

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}=0,\quad \text{a. e. } x\in E.$$

从而根据 $0\leqslant f_k(x)/(1+f_k(x))\leqslant 1$，即可得证.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $f_n\in L([a,b])(n\in\mathbf{N})$，且有

$$|f_n(x)|\leqslant M_n(n\in\mathbf{N},x\in[a,b]),\quad \sum_{n=1}^{\infty}M_n<+\infty,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty$，a. e. $x\in[a,b]$，且有

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(a_nx)=0,\quad \text{a. e. } x\in\mathbf{R}^1.$$

(3) 设 $f\in L((0,\infty))$，且正数列$\{a_n\}$中不会有多于 5 个数落入长度为 1 的区间中，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+a_n)=0$, a.e. $x\in(0,\infty)$.

(4) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，$g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(a_nx)|(x\in\mathbf{R}^1)$. 若 $g\in L(\mathbf{R}^1)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}\text{ 收敛.}$$

证明 (1) 注意$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n<+\infty$.

(2) 首先，我们把问题转型，也就是说把$f(a_nx)$看成是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(a_nx)|$的通项(这里，为使级数有意义，故取绝对值). 从而只需指出

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|f(a_nx)|<+\infty,\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^1.$$

(此时，通项在 $n\to\infty$时必几乎处处趋于 0).

其次，应用积分理论，只需证明 $F(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可积. 因为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^1}F(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^1}|f(a_nx)|\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty,\end{aligned}$$

所以 $F\in L(\mathbf{R}^1)$，证毕.

(3) 对任意的 $b>0$，我们有

$$\begin{aligned}\int_b^{b+1}\sum_{n=1}^{\infty}|f(x+a_n)|\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_b^{b+1}|f(x+a_n)|\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b+a_n}^{b+1+a_n}|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant5\int_0^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这说明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x+a_n)|<+\infty$, a.e. $x\in[b,b+1]$，故知结论成立.

(4) 注意等式

$$\int_{\mathbf{R}^1}g(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^1}|f(a_nx)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}\int_{\mathbf{R}^1}|f(t)|\mathrm{d}t.$$

例 9 试证明下列命题：

(1) (i) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上以 $T>0$ 为周期的可测函数，且 $\int_0^T |f(x)|\mathrm{d}x<\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2}f(nx)=0$, a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}|\cos nx|^{1/n}=1$, a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(2) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，$f_n\in L(\mathbf{R}^1)(n=1,2,\cdots)$，且有

$$\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 1/n^2\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $f_n(x)\to f(x)$，a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(3) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，$a>0$，则级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\dfrac{x}{a}+n\right)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 几乎处处绝对收敛，且其和函数 $S(x)$以 a 为周期，且 $S\in L([0,a])$.

证明 (1) (i) 令 $A=\int_0^T|f(t)|\mathrm{d}t$，则只需注意等式

$$\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(nx)|}{n^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^T|f(nx)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^{nT}|f(t)|\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3}\int_0^T|f(t)|\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot A.$$

(ii) 考查函数$(\ln|\cos x|)^2$，易知它在$[0,\pi]$上可积，且是周期为 π 的周期函数. 从而由(i)可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln|\cos nx|/n)^2=0$. 由此即得所证.

(2) 只需注意等式

$$\int_{\mathbf{R}^1}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$$

(3) 因为我们有

$$\int_0^a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|f\left(\frac{x}{a}+n\right)\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^a\left|f\left(\frac{x}{a}+n\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a\int_n^{n+1}|f(t)|\mathrm{d}t=a\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(x/a+n)$在$[0,a]$上几乎处处绝对收敛. 由于以 $x+a$ 代替 x，上述级数不变，故它在 $\mathbf{R}^1$ 上也就几乎处处绝对收敛. 又有

$$\frac{1}{a}\int_0^a S(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

例 10 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，$p>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-p}f(nx) = 0$, a. e. $x \in \mathbf{R}^1$.

(2) 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上非负实值可积函数渐降列，且 $f_n(x)\to 0(n\to\infty, x\in\mathbf{R}^1)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f_n(x)$，则

$$\int S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 注意等式

$$\int_{\mathbf{R}^1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}|f(nx)|\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}\int_{\mathbf{R}^1}|f(nx)|\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}n^{-1}\int_{\mathbf{R}^1}|f(t)|\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+p}}\int_{\mathbf{R}^1}|f(t)|\mathrm{d}t <+ \infty.$$

(2) 令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k(x)$，则由题设知，$S_{2n}(x)\geqslant 0(x\in\mathbf{R}^1)$. 而因为$S_{2n}(x)\to S(x)(x\in\mathbf{R}^1, n\to\infty)$，所以 $S(x)\geqslant 0(x\in\mathbf{R}^1)$. 根据 $f_1(x)=S_1(x)\geqslant S_3(x)\geqslant\cdots\geqslant S_{2n+1}(x)$以及 $S_{2n+1}(x)\to S(x)(x\in\mathbf{R}^1, n\to\infty)$，又知 $S(x)\leqslant f_1(x)$. 从而由控制收敛定理即得所证.

例 11 试证明下列命题：

(1) 设数列$\{a_n\}$满足$|a_n|<\ln n$ $(n=2,3,\cdots)$，则

$$\int_2^{+\infty}\sum_{n=2}^{\infty}a_n n^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\ln n}n^{-2}.$$

(2) 设$\{t_k\}_0^{\infty}$ 是递减趋于 0 的正数列，若有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{t_k}{k}<\infty$，令

$$f(x) = \frac{t_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}t_k\cos(kx), \quad x \in [0,\pi],$$

则 $f\in L([0,\pi])$.

证明 (1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_2^{+\infty}|a_n|n^{-x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{\ln n}n^{-2}<\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$. 令 $f_n(x)=\sum\limits_{k=2}^{n}a_k\cdot k^{-x}(x\geqslant 2)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k^{-x}, \quad |f_n(x)| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^{-x} \quad (x \geqslant 2).$$

因为$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^{-x}$可积，所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_2^{+\infty} a_n n^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_2^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_2^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \int_2^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} \mathrm{d}x.$$

(2) 注意到$|f(x)| \leqslant t_0/2 + t_1 + \cdots + t_n + t_n/\sin(x/2) \leqslant t_0/2 + t_1 + \cdots + t_n + t_n \pi/x$，我们有

$$\int_0^{\pi} |f(x)| \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} |f(x)| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)} \left[\frac{t_0}{2} + t_1 + \cdots + t_n + (n+1)t_n \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} t_0 + \pi \sum_{m=1}^{\infty} t_m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n}$$

$$= \frac{\pi}{2} t_0 + \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_m}{m} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n}.$$

例 12　解答下列问题：

(1) 设$f \in L([0,1])$，$f_n \in L([0,1])$ $(n \in \mathbf{N})$. 若有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0, \quad |f_n(x)| \geqslant 1, \quad \text{a.e. } x \in [0,1],$$

试问是否有$|f(x)| \geqslant 1$, a. e. $x \in [0,1]$?

(2) 设$E \subset \mathbf{R}^1$且$m(E) < +\infty$，若有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}x = 0, \quad \int_E |f_n(x)| \mathrm{d}x \leqslant 1 \quad (n \in \mathbf{N}),$$

试问是否存在$\{f_{n_k}(x)\}$，使得$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = 0$, a. e. $x \in E$?

(3) 设$\{E_k\}$是$\mathbf{R}^n$中测度有限的可测集列，且有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{E_k}(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0,$$

试证明存在可测集E，使得$f(x) = \chi_E(x)$, a. e. $x \in \mathbf{R}^n$.

(4) 设$\{f_n(x)\}$是$I=[0,b]$上的可测函数列. 若存在数列$\{a_n\}$: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$, 使得$\sum_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)$在$[0,b]$上几乎处处绝对收敛, 试证明存在$\{f_{n_k}(x)\}$, 使得$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=0$, a. e. $x\in I$.

解 (1) 是. 因为依题设知, 存在$\{f_{n_k}(x)\}$, 使得$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)$, a. e. $x\in[0,1]$, 且有$|f_{n_k}(x)|\geqslant 1$, a. e. $x\in[0,1]$, 所以当$k\to\infty$时即得$|f(x)|\geqslant 1$, a. e. $x\in[0,1]$.

(2) 否. 例如$f_n(x)=\mathrm{sgn}(\sin 2\pi 2^n x)(0\leqslant x\leqslant 1)$, 则$|f_n(x)|\leqslant 1$, a. e. $x\in[0,1]$, 且有

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0\ (n\in\mathbf{N}),\quad |f_n(x)|=1,\quad \text{a. e. } x\in[0,1].$$

(3) 依题设知存在$\{E_{k_i}\}$, 使得$\lim_{i\to\infty}\chi_{E_{k_i}}(x)=f(x)$, a. e. $x\in\mathbf{R}^n$. 故存在$E=\lim_{i\to\infty}E_{k_i}$, 且有$f(x)=\chi_E(x)$, a. e. $x\in\mathbf{R}^n$.

(4) 令$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_nf_n(x)|$, 则$F(x)<+\infty$, a. e. $x\in I$. 记$E_k=\{x\in[0,b]: F(x)\leqslant k\}$, 以及$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, 则$m(I\setminus E)=0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\int_{E_k}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_{E_k}F(x)\mathrm{d}x\leqslant k\cdot m(E_k)<+\infty.$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$, 所以$\varliminf_{n\to\infty}\int_{E_k}|f_n(x)|\mathrm{d}x=0$. 从而知存在$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 使得

$$\int_{E_k}|f_{n_k}(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{2^k}\quad(k\in\mathbf{N}),$$

$$\sum_{m>k}^{\infty}\int_{E_k}|f_{n_m}(x)|\mathrm{d}x<+\infty\quad(E_m\supset E_k).$$

这说明$\sum_{m=1}^{\infty}|f_{n_m}(x)|$在$E_k$上几乎处处收敛, 即$f_{n_m}(x)$在$E$上几乎处处收敛于0.

例 13 试证明下列命题:

(1) 假设$f(x)$定义在$\mathbf{R}^n$上. 如果对于任意的$\varepsilon>0$, 存在$g,h\in$

$L(\mathbf{R}^n)$，满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ $(x\in\mathbf{R}^n)$，且使得

$$\int_{\mathbf{R}^n}[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

则 $f\in L(\mathbf{R}^n)$.

(2) 设 $f,g\in L(E)$. $f_k,g_k\in L(E)$，$|f_k(x)|\leqslant M$ $(k\in\mathbf{N},x\in E)$，

$$\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x\to 0\quad(k\to\infty),$$

$$\int_E|g_k(x)-g(x)|\mathrm{d}x\to 0\quad(k\to\infty),$$

则
$$\int_E|f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\mathrm{d}x\to 0\quad(k\to\infty).$$

(3) 设 $f_k(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 若存在 $F\in L(E)$，使得 $|f_k(x)|\leqslant F(x)(x\in E)$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证明 (1) 只需证明 $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数. 依题设知，存在 $\{h_k(x)\}$，$\{g_k(x)\}$，使得

$$\int_{\mathbf{R}^n}[h_k(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x<\frac{1}{k}\quad(k\in\mathbf{N}),$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}[h_k(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x=0$. 从而知存在$\{k_i\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty}[h_{k_i}(x)-g_{k_i}(x)]=0,\quad g_{k_i}(x)\leqslant f(x)\leqslant h_{k_i}(x)\quad(x\in\mathbf{R}^n).$$

这说明 $\lim\limits_{i\to\infty}[f(x)-g_{k_i}(x)]=0$ 或 $\lim\limits_{i\to\infty}g_{k_i}(x)=f(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^n$，故 $f(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上可测.

(2) 反证法. 假定存在 $\varepsilon_0>0$ 以及$\{k_i\}$，使得

$$\int_E|f_{k_i}(x)g_{k_i}(x)-f(x)g(x)|\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon_0.$$

为此，不妨再假定 $\lim\limits_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x)$，a. e. $x\in E$(否则把 k_i 再换成 k_{i_j})，且有$|f(x)|\leqslant M$(a. e. $x\in E$). 注意到

$$|f_{k_i}(x)g(x)-f(x)g(x)|\leqslant 2M|g(x)|,\quad \text{a.e.}\,x\in E,$$

$$\int_E|f_{k_i}(x)g_{k_i}(x)-f_{k_i}(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\int_E|g_{k_i}(x)-g(x)|\mathrm{d}x,$$

可得 $\lim\limits_{i\to\infty}\int_E|f_{k_i}(x)g(x)-f(x)g(x)|\mathrm{d}x=0$，以及

$$\lim_{i\to\infty}\int_E |f_{k_i}(x)g_{k_i}(x) - f(x)g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \lim_{i\to\infty}\int_E |f_{k_i}(x)g_{k_i}(x) - f_{k_i}(x)g(x)|\mathrm{d}x$$

$$+ \lim_{i\to\infty}\int_E |f_{k_i}(x)g(x) - f(x)g(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

这导致矛盾,即得所证.

(3) 只需指出对任意的子列$\{f_{k_i}(x)\}$,均存在$\{f_{k_{i_j}}(x)\}$,使得$\lim_{j\to\infty}\int_E f_{k_{i_j}}(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$即可. 实际上,因为$f_{k_i}(x)$在$E$上依测度收敛于$f(x)$,所以存在$\{f_{k_{i_j}}(x)\}$,使得$\lim_{j\to\infty}f_{k_{i_j}}(x)=f(x)$, a. e. $x\in E$. 而由$|f_{k_{i_j}}(x)|\leqslant F(x)(x\in E)$,可知$\lim_{j\to\infty}\int_E f_{k_{i_j}}(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

例 14 试证明下列命题:

(1) 设$\{f_k(x)\}$是E上非负实值可测函数列,$m(E)<+\infty$,则存在正数列$\{a_k\}$以及E上几乎处处有限的可测函数$F(x)$,使得$a_kf_k(x)\leqslant F(x)$, a. e. $x\in E$.

(2) 设$f(x)$是$[0,1]$上正值递增函数. 若有$g(x)$满足$0\leqslant g(x)\leqslant [f(x)-f(y)]/(x-y)\ (0<y<x\leqslant 1)$,则存在$(0,1)$上递减可积函数$F(x)$,使得$g(x)\leqslant F(x)\ (0<x<1)$.

(3) 设$f_n\in L^1(\mathbf{R}^1)\ (n=1,2,\cdots)$,且在$\mathbf{R}^1$上$f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$. 则$f\in L^1(\mathbf{R}^1)$以及$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x$当且仅当对任给$\varepsilon>0$,存在$E\subset\mathbf{R}^1$: $m(E)<+\infty$,以及$g(x)\geqslant 0, g\in L^1(\mathbf{R}^1)$,自然数$n_0$,使得

$$\left|\int_{\mathbf{R}^1\setminus E} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,\quad |f_n(x)|\leqslant g(x)\quad (n\geqslant n_0, x\in E).$$

证明 (1) 易知存在$\{a_k\}$: $a_k>0\ (k\in\mathbf{N})$,使得$\lim_{k\to\infty}a_kf_k(x)=0$, a. e. $x\in E$,且同时不妨假定有

$$\int_E \frac{|a_kf_k(x)|\mathrm{d}x}{1+|a_kf_k(x)|} < \frac{1}{2^k}.$$

令$F_k(x)=\sum_{i=1}^{k}a_if_i(x)\ (k\in\mathbf{N}, x\in E)$,我们有

$$\int_E [|F_{k+1}(x) - F_k(x)|/(1 + |a_{k+1}f_{k+1}(x)|)]dx < \frac{1}{2^{k+1}},$$

$$\int_E \frac{|F_m(x) - F_k(x)|dx}{1 + |a_m f_m(x)|} \leqslant \sum_{i=k}^{m-1}\int_E \frac{|F_{i+1}(x) - F_i(x)|dx}{1 + |a_{i+1}f_{i+1}(x)|}$$

$$< \sum_{i=k}^{m-1} 1/2^{i+1} < 1/2^k \quad (m > k).$$

由此可知 $F_k(x)$ 在 E 上依测度收敛，记极限函数为 $F(x)$，则由 $F_k(x) \leqslant F_{k+1}(x)(k \in \mathbf{N}, x \in E)$ 可知，$\lim_{k\to\infty} F_k(x) = F(x)$，a.e. $x \in E$，且有

$$a_k f_k(x) \leqslant F_k(x) \leqslant F(x) \quad (k \in \mathbf{N}, x \in E).$$

(2) 令 $h(x) = \inf_{0<y<x}\{[f(x) - f(y)]/(x-y)\}(0<x\leqslant 1)$，以及 $F(x) = \sup_{x\leqslant t\leqslant 1}\{h(x)\}(0<x\leqslant 1)$，易知 $F(x)$ 递减，且有 $g(x)\leqslant F(x)$. 假定 $F(x)$ 无界，我们有

$$\int_0^1 F(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot m(\{x \in [0,1]: n-1 < F(x) \leqslant n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} m(\{x \in [0,1]: F(x) > n\}).$$

故存在 $[0,1]$ 中递减趋于 0 的正数列 $\{t_n\}$：$h(t_n) \geqslant n$，而且 $\int_0^1 F(x)dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} t_n$. 令 $b_n = f(t_n)(n \in \mathbf{N})$，则有 $n(t_n - t_{n+1}) \leqslant b_n - b_{n+1}$ 或 $(t_n - t_{n+1}) \leqslant b_n/n - b_{n+1}/n(n \in \mathbf{N})$. 从而对 n 相加，可得

$$t_n \leqslant \frac{b_n}{n} - \frac{b_{n+1}}{n(n+1)} - \frac{b_{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \cdots.$$

再相加就有 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leqslant b_1 \leqslant f(1)$，这说明 $F \in L((0,1))$.

(3) **必要性** 易知存在 A：$m(A)<\infty$，使得 $|f(x)|$ 在 A 上有界(设为)M，且有 $\int_{\mathbf{R}^1\setminus A} |f(x)|dx < \varepsilon$. 又有 $E \subset A$：$m(A\setminus E) < \varepsilon/M$，$f_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 故存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/m(E)(x \in E)$. 再由

$$\int_{\mathbf{R}^1\setminus E} f_n(x)dx = \int_{\mathbf{R}^1\setminus A} f(x)dx + \int_{A\setminus E} f(x)dx$$

$$+\int_{\mathbf{R}^1}[f_n(x)-f(x)]\mathrm{d}x-\int_E[f_n(x)-f(x)]\mathrm{d}x$$

可知 $\left|\int_{\mathbf{R}^1\setminus E}f_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon+Mm(A\setminus E)+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{m(E)}m(E)<4\varepsilon(n\geqslant n_0)$. 从而令

$$g(x)=|f(x)|+\varepsilon/m(E)\ (x\in E),\quad g(x)=0\ (x\in\mathbf{R}^1\setminus E)\ \text{即可.}$$

充分性 易知

$$\int_{\mathbf{R}^1\setminus E}|f(x)|\leqslant\varepsilon,\quad\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\to0\quad(n\to\infty),$$

$$\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\int_{\mathbf{R}^1\setminus E}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^1\setminus E}|f_n(x)|\mathrm{d}x$$
$$+\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x,$$

易得 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant2\varepsilon$.

例 15 试证明函数列$\{\cos nx\}$在$[-\pi,\pi)$不是依测度收敛到 0 的.

证明 反证法. 假定结论不真,则 $\cos^2(nx)$也在$[-\pi,\pi)$上依测度收敛于 0. 由于 $|\cos^2(nx)|\leqslant1\,(n\in\mathbf{N})$,故根据控制收敛定理可得 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\mathrm{d}x\to0(n\to\infty)$. 但我们有 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\mathrm{d}x=\pi$,这导致矛盾,结论得证.

例 16 试求下列极限值:

(1) $I=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$;　　(2) $I=\lim_{n\to\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+nx^3}$;

(3) $I=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^3(nx)\mathrm{d}x$;

(4) $I=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\cdot\arctan(nx)\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为我们有

$$I_n\triangleq\frac{x^n}{1+x}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}+\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{(1+x)^2},$$

$$0\leqslant\frac{x^n}{(1+x)^2}\leqslant1\ (0\leqslant x\leqslant1),\quad\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{(1+x)^2}=0\ (0\leqslant x<1),$$

所以根据控制收敛定理可得 $I=1/2$.

(2) 因为我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}=0,\quad \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\leqslant\frac{1}{x^{5/2}}\quad(1\leqslant x<+\infty),$$

所以 $I=\int_1^{+\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\mathrm{d}x=0.$

(3) 因为 $1+n^2x^2\geqslant 2nx$，所以 $\frac{|n\sqrt{x}\cdot\sin^3(nx)|}{1+n^2x^2}\leqslant 1/(2\sqrt{x})$ $(x>0)$. 易知 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sqrt{x}\cdot\sin^3(nx)/(1+n^2x^2)=0\,(0<x<\pi)$，从而根据控制收敛定理可得 $I=0$.

(4) 因为我们有 $|\sin x\cdot\arctan(nx)|\leqslant\pi/2$，以及

$$\lim_{n\to\infty}\sin x\cdot\arctan(nx)=\begin{cases}\pi\sin x/2, & 0<x\leqslant\pi/2,\\ 0, & x=0,\\ -\pi\sin x/2, & -\pi/2<x<0,\end{cases}$$

所以根据控制收敛定理，即得

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\sin x\mathrm{d}x-\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\pi}{2}\sin x\mathrm{d}x=\pi.$$

例 17 试求下列极限值：

(1) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}\frac{n^2x}{1+x^2}\mathrm{e}^{-n^2x^2}\mathrm{d}x$；

(2) $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{\varepsilon^2x^2})\mathrm{e}^{-x^3}\cdot\sin^4x\mathrm{d}x$；

(3) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x/n)^n\cdot\sqrt[n]{x}}$；

(4) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin^n\left(x+\frac{r_n\pi}{n}\right)\mathrm{d}x\quad(\{r_n\}\subset\mathbf{R}^1)$；

(5) $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$.

解 (1) (i) $a=0$. 作变量替换 $u=nx$，我们有

$$I_n\triangleq\int_0^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{1+(u/n)^2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{1+(u/n)^2}=u\mathrm{e}^{-u^2}.$$

因为 $u\mathrm{e}^{-u^2}/(1+(u/n)^2)\leqslant u\mathrm{e}^{-u^2}\,(u\geqslant 0)$，所以

$$I=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}.$$

(ii) $a>0$. 用(i)相同的变量替换，可得

$$I_n \triangleq \int_{na}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}\mathrm{d}u}{1+(u/n)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{1+(u/n)^2}\chi_{[na,+\infty)}(u)\mathrm{d}u.$$

采用与(i)相同的控制函数可得 $I=0$.

(2) 不妨设 $0<\varepsilon<1$,则 $|1-e^{\varepsilon^2x^2}|\leqslant 2\varepsilon x e^{\varepsilon^2x^2}$,以及

$$|1-e^{\varepsilon^2x^2}|e^{-x^3} \leqslant 2\varepsilon x e^{-x^2(x-\varepsilon^2)}.$$

记被积函数为 $f_\varepsilon(x)$,我们有

$$|f_\varepsilon(x)| \leqslant 2\varepsilon x e^{-x^2}(x>2), \quad |f_\varepsilon(x)| \leqslant M\ (0\leqslant x\leqslant 2),$$

以及 $f_\varepsilon(x)\to 0(\varepsilon\to 0)$. 从而根据控制收敛定理,可知 $I=0$.

(3) 记被积函数为 $f_n(x)$,则 $f_n(x)\to e^{-x}(n\to\infty)$.

(i) 对 $x\in(0,1)$,我们有 $x^{1/n}\geqslant x^{1/2}$,$(1+x/n)^n\geqslant 1$,故 $f_n(x)\leqslant 1/\sqrt{x}$.

(ii) 对 $x\in[1,\infty)$,我们有 $x^{-1/n}\leqslant 1$,故 $f_n(x)\leqslant(1+x/n)^{-n}$. 又由 $(1+x/n)^n=1+x+\dfrac{n(n-1)}{2!}\left(\dfrac{x}{n}\right)^2+\cdots\geqslant x^2\dfrac{n-1}{2n}\geqslant\dfrac{x^2}{4}(n\geqslant 2)$,可知 $f_n(x)\leqslant 4/x^2$. 从而根据控制收敛定理,可得 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=1$.

(4) 令 $E_n=\{x\in(0,\infty): |\sin(x+r_n\pi/n)|=1\}$,则 E_n 是可数集,且存在 $\delta_n>0$,开集 G_n: $m(G_n)<\delta_n$,使得 $E_n\subset G_n\subset(0,\infty)(n\in\mathbf{N})$,以及

$$\lim_{n\to\infty}\sin^n(x+r_n\pi/n)=0 \quad \left(x\,\overline{\in}\,G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right).$$

从而根据控制收敛定理,可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)\setminus G} e^{-x}\sin^n(x+r_n\pi/n)\mathrm{d}x=0.$$

对 $\varepsilon>0$,取 $\delta_n=\varepsilon/2^n$ 时又有

$$\int_{[0,\infty)\cap G} e^{-x}\sin^n(x+r_n\pi/n)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

综合以上结果,即可得证.

(5) 记被积函数为 $f_n(x)$. 因为我们有($x\geqslant 0$)

$$\frac{\ln(x+n)}{n}<\frac{x+n}{n}\leqslant 1+x, \quad |f_n(x)|<\begin{cases}2xe^{-x}, & x\geqslant 1,\\ 2e^{-x}, & 0<x<1\end{cases}$$

以及 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0(0\leqslant x<\infty)$,所以根据控制收敛定理,可知 $I=0$.

例 18 设$\{\alpha_n\}$是实数列，并作点集

$$E=\{x\in\mathbf{R}^1:\lim_{n\to\infty}e^{i\alpha_n x}\text{ 存在}\}.$$

若$m(E)>0$. 试证明$\{\alpha_n\}$是收敛列.

证明 易知E中的点是可加的，故由$m(E)>0$，可知$E-E\supset I=(-\delta,\delta)$，$E=\mathbf{R}^1$. 令$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{i\alpha_n x}(x\in\mathbf{R}^1)$，则对任意的$f\in L(\mathbf{R}^1)$，可得(控制收敛定理)

$$\int_{\mathbf{R}^1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1}f(x)e^{i\alpha_n x}\mathrm{d}x.$$

假定对$\{\alpha_n\}$的任一子列$\{\beta_n\}$，有$\beta_n\to\infty(n\to\infty)$，则根据 Riemann-Lebesgue 引理，得$\int_{\mathbf{R}^1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$(任意$f\in L(\mathbf{R}^1)$). 这说明$g(x)=0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^1$. 但这与$|g(x)|=1(x\in\mathbf{R}^1)$矛盾，因此$\{\alpha_n\}$是有界数列.

现在，假定$\{\alpha_n\}$有两个极限点：a与b，则取$\{\alpha_n\}$的子列$\{\alpha_n'\}$，$\{\alpha_n''\}$：$\alpha_n'\to a$，$\alpha_n''\to b(n\to\infty)$，易知$e^{iax}=e^{ibx}(x\in\mathbf{R}^1)$. 在等式两端对$x$求导，立即得出$a=b$，这说明$\{\alpha_n\}$只有一个极限点.

例 19 解答下列问题：

(1) 求$I=\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$之值；　　(2) 求$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+e^x}$之值；

(3) 求$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{e^x-1}\mathrm{d}x(a>0)$之值；

(4) 求$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$之值，其中

$$f(x)=\begin{cases}x\ln x/(x-1), & 0<x<1,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

解 (1) 用 Taylor 展式：$e^{-x}\cos\sqrt{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n e^{-x}/(2n)!$，并注意到$\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(n+1)=n!$，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left|\frac{e^{-x}x^n}{(2n)!}\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}<+\infty.$$

因此可进行逐项积分，即得

$$I=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{(2n)!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{(2n)!}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}=1-\frac{1}{2}+\frac{2!}{4!}-\frac{3!}{6!}+\frac{4!}{8!}-\cdots.$$

(2) 因为$\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x\mathrm{e}^{-nx}(x>0)$,以及

$$\int_0^{+\infty}|(-1)^n x\mathrm{e}^{-nx}|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2},$$

所以可进行逐项积分,得到

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

(3) 因为$\dfrac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\sin(ax)$,以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}|\mathrm{e}^{-nx}\cdot\sin(ax)|\mathrm{d}x\leqslant a\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\frac{a}{n^2},$$

所以可进行逐项积分,我们有

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\cdot\sin(ax)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\quad(a>0).$$

(4) 对 $0<\varepsilon<1-\delta<1$,作变量替换 $x=1-y$,得

$$\int_{\varepsilon}^{1-\delta}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1-\varepsilon}^{\delta}\frac{(1-y)\ln(1-y)}{-y}\mathrm{d}y$$

$$=\left\{-y+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{n^2(n-1)}\right\}\Bigg|_{1-\varepsilon}^{\delta}$$

$$=1-\delta-\varepsilon+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\delta^n-(1-\varepsilon)^n}{n^2(n-1)}<+\infty.$$

令 $\varepsilon=1/k,\delta=1/m(k,m\in\mathbf{N})$,且 $k,m\to\infty$,可得 $I=1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

例 20 试证明下列积分等式:

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\frac{\sin x\mathrm{d}x}{1-2r\cos x+r^2}=\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$,其中 $f\in L((a,b)),0<r<1$.

(2) $f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\arctan t(t\geqslant 0)$.

证明 (1) 注意$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin(nx)=\frac{\sin x}{1-2r\cos x+r^2}$,以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b |r^{n-1}f(x)\sin(nx)|\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \cdot r^{n-1} < +\infty.$$

(2) (i) 在点 $t_0>0$ 处. 易知$|\mathrm{e}^{-tx}\sin x/x|\leqslant \mathrm{e}^{-tx}(x\geqslant 0)$,故 $f(t)(t>0)$存在. 令 $F(x)=1(0\leqslant x\leqslant 1)$,$F(x)=\mathrm{e}^{-x}(1<x)$,则 $F\in L([0,\infty))$. 因为我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}=0 \quad (x>0), \qquad \left|\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant F(x) \quad (x>0),$$

所以根据控制收敛定理,即得 $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$. 此外,由

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right)=-\mathrm{e}^{-tx}\sin x \quad (x\geqslant 0),$$

$$|\mathrm{e}^{-tx}\sin x|\leqslant \mathrm{e}^{-ax} \quad (t\geqslant a>0, x\geqslant 0).$$

可知 $f'(t)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\sin x\mathrm{d}x(t>a)$. 注意到

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-tx}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^{-At}(t\sin A+\cos A)}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2},$$

则令 $A\to+\infty$,得 $f'(t)=-1/(1+t^2)(t>0)$. 从而对 $t>0$ 有

$$f(t_0)-f(t)=-\int_t^{t_0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan t-\arctan t_0.$$

再令 $t\to+\infty$,即得 $f(t_0)=\pi/2-\arctan t_0$.

(ii) 在点 $t_0=0$ 处. 此时,$\frac{\sin x}{x}$在$[0,\infty)$上不可积,但其反常 Riemann 积分存在. 令 $f_n(t)=\int_0^n \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x(t\geqslant 0)$. 并注意到$|f_n(n)|\leqslant\int_0^n \mathrm{e}^{-xn}\mathrm{d}x=\frac{1-\mathrm{e}^{-n^2}}{n}\leqslant\frac{1}{n}$,故 $\lim_{n\to\infty}f_n(n)=0$. 又由

$$f_n'(t)=-\int_0^n \mathrm{e}^{-tx}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-nt}(t\sin n+\cos n)-1}{1+t^2},$$

可知 $\lim_{n\to\infty}f_n'(t)=-1/(1+t^2)(t>0)$,以及

$$|f_n'(t)|\leqslant(1+(1+t)\mathrm{e}^{-t})/(1+t^2) \quad (t>0).$$

令 $g_n(t)=f_n'(t)\chi_{[0,n]}(t)(n\in\mathbf{N})$,则 $g_n\in L([0,\infty))$,而且

$$|g_n(t)|\leqslant|f_n'(t)|, \quad \lim_{n\to\infty}g_n(t)=-1/(1+t^2) \quad (t>0).$$

根据控制收敛定理，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n'(t)\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}g_n(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=-\frac{\pi}{2}.$$

再注意到 $\int_0^n f_n'(t)\mathrm{d}t=f_n(n)-f_n(0)$，又得 $\lim_{n\to\infty}f_n(0)=\frac{\pi}{2}$.

例 21 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L((0,\infty))$，则函数 $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{x+t}\mathrm{d}t$ 在 $(0,\infty)$ 上连续.

(2) 设 $x^s f(x)$，$x^t f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积，其中 $s<t$，则积分 $\int_0^{+\infty}x^u f(x)\mathrm{d}x(u\in(s,t))$ 存在且是 $u\in(s,t)$ 的连续函数.

(3) 设定义在 $E\times\mathbf{R}^n$ 的函数 $f(x,y)$ 满足：

(i) 对每一个 $y\in\mathbf{R}^n$，$f(x,y)$ 是 E 上的可测函数.

(ii) 对每一个 $x\in E$，$f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数.

若存在 $g\in L(E)$，使得 $|f(x,y)|\leqslant g(x)$，a.e. $x\in E$，则函数 $F(y)=\int_E f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数.

证明 (1) 对 $x_0\in(0,\infty)$，令 $0<|\Delta x|<x_0/2$，则 $x_0+\Delta x>x_0/2$，且当 $x_0/2<x<x_0+x_0/2$ 时，我们有 $|f(t)/(x+t)|\leqslant|f(t)|/(x_0/2)$ $(0\leqslant t)$. 由此即得所证.

(2) 注意 $|x^u f(x)|\leqslant x^s|f(x)|+x^t|f(x)|(s<u<t)$.

(3) 证略.

例 22 试证明下列积分等式：

(1) 设 $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x(t>0)$，则 $\Gamma'(t)=\int_0^{+\infty}x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$.

(2) $I(t)\triangleq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x=\arctan t$.

(3) $I(t)\triangleq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xt)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$.

(4) 设 $F(t)\triangleq\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x(t>0)$，则 $F''(t)-F(t)=\frac{\pi}{2}(t>0)$.

证明 (1) 对 $0<a<t<b$，我们有 $\frac{\partial}{\partial t}(x^{t-1}\mathrm{e}^{-x})=x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x$. 此外，又知

$$|x^{t-1}e^{-x}\ln x| \leqslant x^t e^{-x} \leqslant x^b e^{-x} \quad (a<t<b, x\geqslant 1),$$

$$|x^{t-1}e^{-x}\ln x| \leqslant x^{a-1}e^{-x}\ln(1/x) \quad (a<t<b, 0<x<1).$$

因为 $a>0$，所以可选 $\varepsilon>0$：$a-\varepsilon-1>-1$ 以及 $M>0$，使得

$$\begin{aligned}|x^{t-1}e^{-x}\ln x| &\leqslant x^{a-1-\varepsilon}e^{-x}x^{\varepsilon}\ln(1/x)\\ &\leqslant M\cdot x^{a-1-\varepsilon}e^{-x} \quad (a<t<b, 0<x<1).\end{aligned}$$

综合以上所述，可知对 $0<x<\infty$，有

$$|x^{t-1}e^{-x}\ln x| \leqslant Mx^{a-1-\varepsilon}e^{-x}\chi_{(0,1)}(x) + x^b e^{-x}\chi_{[1,\infty)}(x) \quad (a<t<b).$$

从而结论成立(积分号下可求导).

(2) 注意 $|e^{-x}\sin(tx)/x| \leqslant |t|e^{-x}$，$\left|\dfrac{\partial}{\partial t}(e^{-x}\sin(tx)/x)\right| = |e^{-x}\cos(tx)| \leqslant e^{-x}$，易知 $\dfrac{d}{dt}(I(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(tx)dx = (1+t^2)^{-1}$，由此即得所证.

(3) 注意 $|e^{-x^2}\cos(2xt)| \leqslant e^{-x^2}$，以及

$$\left|\frac{d}{dt}(e^{-x^2}\cos(2xt))\right| = |-2xe^{-x^2}\sin(2xt)| \leqslant 2xe^{-x^2},$$

可知能进行积分号下求导运算，我们有

$$\begin{aligned}I'(t) &= -2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin(2xt)dx\\ &= e^{-x^2}\sin(2xt)\Big|_0^{+\infty} - 2t\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2xt)dx\\ &= -2t\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2xt)dx.\end{aligned}$$

由此得 $I'(t) = -2tI(t)$，故知 $I(t) = I(0)e^{-t^2}$，而 $I(0) = \sqrt{\pi}/2$.

(4) 令 $f(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{x(1+x^2)} = \dfrac{t\sin xt}{xt(1+x^2)}$ $(t>0)$，取定 $t>0$ 的值，$f(x,t)$ 在 $[0,\infty)$ 上可积，而由 $f_t'(x,t) = \dfrac{\cos xt}{1+x^2}$ 以及 $f_t''(x,t) = -x\dfrac{\sin xt}{1+x^2} = -\dfrac{x^2}{1+x^2}\dfrac{\sin(xt)}{xt}\cdot t$，可知结论成立.

例 23 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数，对 $(-1,1)$ 中任意取定的 x，$e^{tx}f(t)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上可积，且令 $g(x) = \int_{\mathbf{R}^1} e^{xt}f(t)dt$，则 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可积.

(2) 设 $f(x,t)$ 定义在 $(a,b)\times(a,b)$ 上，且对取定的 $t\in(a,b)$，$f(x,t)$ 是 x 在 (a,b) 上的连续可微函数；对取定的 $x\in(a,b)$，$f(x,t)$ 是 t 在 (a,b) 上的连续函数. 若存在 $F\in L((a,b))$，使得 $|f'_x(x,t)|\leqslant F(t)$，则 $g(x)=\int_a^x f(x,t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 上可微，且有 $g'(x)=f(x,x)+\int_a^x f'_x(x,t)\mathrm{d}t$.

证明 (1) 对 $x\in(-1,1)$，我们有

$$|\mathrm{e}^{xt}tf(t)|\leqslant \mathrm{e}^{tx}\frac{2}{1-|x|}\mathrm{e}^{|t|(1-|x|)/2}|f(t)|$$

$$=\frac{2}{1-|x|}\mathrm{e}^{t(x+\mathrm{sgn}t\cdot(1-|x|)/2)}|f(t)|,$$

$$\left|x+\mathrm{sgn}t\,\frac{1-|x|}{2}\right|=\left|x\pm\frac{1-|x|}{2}\right|<1.$$

由此知对固定 $x\in(-1,1)$，$\mathrm{e}^{xt}tf(t)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上可积. 故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{e}^{xt}f(t)\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{e}^{xt}tf(t)\mathrm{d}t,$$

且对任意的 $x\in(-1,1)$，以及 $y>x$，可知 $(x<z<y,x<z'<z)$

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{ty}f(t)-\mathrm{e}^{tx}f(t)}{y-x}-\mathrm{e}^{tx}f(t)\right|=|(\mathrm{e}^{tz}-\mathrm{e}^{tx})tf(t)|$$

$$=|\mathrm{e}^{tz'}t^2f(t)(z-x)|$$

$$\leqslant\begin{cases}|y-x|\mathrm{e}^{t(1+x)/2}t^2f(t), & t\geqslant 0,x<y<\dfrac{1+x}{2},\\ |y-x|\mathrm{e}^{tx}t^2f(t), & t<0,x<y<\dfrac{1+x}{2}.\end{cases}$$

(类似地可推出 $\mathrm{e}^{tx}t^2f(t)$ 可积)从而我们有

$$\lim_{y\searrow x}\int_{\mathbf{R}^1}\left[\frac{\mathrm{e}^{ty}f(t)-\mathrm{e}^{tx}f(t)}{y-x}-\mathrm{e}^{tx}tf(t)\right]\mathrm{d}t=0,$$

$$\lim_{y\nearrow x}\int_{\mathbf{R}^1}\left[\frac{\mathrm{e}^{ty}f(t)-\mathrm{e}^{tx}f(t)}{y-x}-\mathrm{e}^{tx}tf(t)\right]\mathrm{d}t=0.$$

(2) 令 $F(x,u)=\int_a^u f(x,t)\mathrm{d}t$，则 $g(x)$ 是 $F(x,u)$ 与 $u=x$ 的复合函数. 由控制收敛定理以及 f 的连续性可知，

$$F'_x(x,u)=\int_a^u f'_x(x,t)\mathrm{d}t,\quad F'_u(x,u)=f(x,u).$$

从而得

$$g'(x)=F'_x(x,u)\big|_{u=x}+F'_u(x,x)=\int_a^x f'_x(x,t)\mathrm{d}t+f(x,x).$$

例 24 设 $F\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$，且 $F(x)$，$F'(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上有界，$F(0)=0$. 对

$g\in L(\mathbf{R}^1)$,定义 $f(t)=\int_{\mathbf{R}^1}F(tg(x))\mathrm{d}x,t\in\mathbf{R}^1$,试证明 $f(t)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可微.

证明 首先,对任意的 t,x,均存在 θ: $0<\theta<1$,使得 $F(tg(x))=F(tg(x))-F(0)=F'(\theta tg(x))tg(x)$. 注意到 $F'(u)$在 $\mathbf{R}^1$ 上有界,故 $F(tg(x))$在 $\mathbf{R}^1$ 上(对 x)可积.

其次,对任意的 $s,t(s\neq t)\in\mathbf{R}^1$,我们有($r$ 位于 s 与 t 之间)

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F(sg(x))-F(tg(x))}{s-t}-F'(tg(x))g(x)\right|\\&=|F'(rg(x))g(x)-F'(tg(x))g(x)|\\&\leqslant 2\sup_{u\in\mathbf{R}^1}|F'(u)||g(x)|,\end{aligned}$$

$$\lim_{s\to t}\left|\frac{F(sg(x))-F(tg(x))}{s-t}-F'(tg(x))g(x)\right|=0.$$

从而根据控制收敛定理,即得所证.

§4.4 可积函数与连续函数的关系

基本内容

从可测函数与连续函数的密切联系中,可以导出可积函数与连续函数的一定关系,它将有助于进一步研究可积函数的性质.

定理 1 若 $f\in L(E)$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$,使得

$$\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

注 上述事实表明,若 $f\in L(E)$,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 f 的分解:

$$f(x)=g(x)+[f(x)-g(x)]=f_1(x)+f_2(x),\ x\in E,$$

其中 $f_1(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数,$|f_2(x)|$在 E 上的积分小于 ε.

推论 1 设 $f\in L(E)$,则存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数列$\{g_k(x)\}$,使得

(i) $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x=0$;

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=f(x)$, a.e. $x\in E$.

推论 2 设 $f\in L([a,b])$,则存在其支集在(a,b)内的连续函数列$\{g_k(x)\}$,使得

(i) $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{[a,b]}|f(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x=0$；

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=f(x)$, a. e. $x\in[a,b]$.

定理 2(平均连续性) 若 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，则有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

推论 若 $f\in L(E)$，则存在具有紧支集的阶梯函数列$\{\varphi_k(x)\}$，使得

(i) $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$, a.e. $x\in E$；

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x=0$.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^n)$. 若对一切 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $\varphi(x)$，均有 $\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^n$.

(2) 设 $f\in L([a,b])$. 若对其支集在(a,b)内且可微的任一函数 $\varphi(x)$，都有 $\int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=c$(常数), a. e. $x\in[a,b]$.

(3) 若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是有界可测集，则

$$\lim_{|h|\to 0}m(E\cap(E+\{h\}))=m(E),\quad h\in\mathbf{R}^n.$$

证明 (1) 采用反证法. 不妨假设函数 $f(x)$在有界正测集 E 上有 $0<f(x)$，则可作具有紧支集连续函数列$\{\varphi_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|\chi_E(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x=0;$$

$$|\varphi_k(x)|\leqslant 1\ (k=1,2,\cdots);\qquad \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\chi_E(x),\ \text{a. e. } x\in E.$$

由于$|f(x)\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|$，$x\in E$，故知

$$0<\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x=0.$$

矛盾.

(2) 对任意的支集在(a,b)内的连续函数 $g(x)$，作 $h(x)$：支集在(a,b)内的连续函数，且满足 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=1$，令

$$\varphi(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-\int_a^x h(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^b g(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

易知 $\varphi(x)$的支集在(a,b)内，且有

$$\varphi'(x) = g(x) - h(x)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

从而由题设可得

$$\begin{aligned}0 = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\left(g(x) - h(x)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(f(x) - \int_a^b f(t)h(t)\mathrm{d}t\right) g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此我们有

$$f(x) - \int_a^b f(t)h(t)\mathrm{d}t = 0, \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

即得所证.

(3) 考查特征函数 $\chi_E(x)$，对于 $h\in\mathbf{R}^n$，我们有

$$\chi_{E+\{h\}}(x) = \chi_E(x-h), \quad \chi_{E\cap(E+\{h\})}(x) = \chi_E(x-h)\cdot\chi_E(x).$$

从而可得

$$m(E\cap(E+\{h\})) = \int_{\mathbf{R}^n}\chi_E(x)\cdot\chi_E(x-h)\mathrm{d}x.$$

因为我们有 $m(E)=\int_{\mathbf{R}^n}\chi_E(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\chi_E^2(x)\mathrm{d}x$，所以得到

$$\begin{aligned}&|m(E\cap(E+\{h\})) - m(E)| \\ &\leqslant \int_{\mathbf{R}^n}|\chi_E(x)||\chi_E(x-h)-\chi_E(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\mathbf{R}^n}|\chi_E(x-h)-\chi_E(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据可积函数的平均连续性可知，上式右端当$|h|\to 0$时趋于零. 即得所证.

例 2 试证明下列命题：

(1) (**Riemann-Lebesgue 引理的推广**) 若$\{g_n(x)\}$是$[a,b]$上的可测函数列且满足

(i) $|g_n(x)|\leqslant M(x\in[a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$；

(ii) 对任意的 $c\in[a,b]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,c]}g_n(x)\mathrm{d}x=0$，

则对任意的 $f\in L([a,b])$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f(x)g_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

(2) 设 $\{\lambda_n\}$ 是实数列，且 $\lambda_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，则点集

$$A\xlongequal{\text{记为}}\left\{x\in\mathbf{R}^1:\ \lim_{n\to\infty}\sin\lambda_n x\ \text{存在}\right\}$$

是零测集.

证明 (1) 对于任给的 $\varepsilon>0$，可作阶梯函数 $\varphi(x)$，使得

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

不妨设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上有表示式

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{p}y_i\chi_{[x_{i-1},x_i)}(x),\quad x\in[a,b),$$

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_p=b$. 因为

$$\left|\int_{[a,b]}\varphi(x)g_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^{p}\left|y_i\int_{[x_{i-1},x_i]}g_n(x)\mathrm{d}x\right|,$$

且从假设可知存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，上式右端小于 $\varepsilon/2$，所以

$$\left|\int_{[a,b]}\varphi(x)g_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad n\geqslant n_0.$$

最后，当 $n\geqslant n_0$ 时，得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)g_n(x)\mathrm{d}x\right|\\&\quad\leqslant\left|\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]g_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b\varphi(x)g_n(x)\mathrm{d}x\right|\\&\quad\leqslant M\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\chi_A(x)\sin\lambda_n x$，$x\in\mathbf{R}^1$，则由上例可知，对任意的 $m(B)<+\infty$ 的可测集 $B\in\mathbf{R}^1$，有(有界收敛定理)

$$\int_B f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_B\chi_A(x)\sin\lambda_n x\mathrm{d}x=0.$$

这说明 $f(x)=0$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$. 另一方面，我们有

$$\int_B f^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{B\cap A}\sin^2\lambda_n x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_{B\cap A}[1-\cos2\lambda_n x]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}m(B \cap A) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{B\cap A} \cos 2\lambda_n x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}m(B \cap A).$$

由此可知 $m(B\cap A)=0$,注意到 B 的任意性,必有 $m(A)=0$.

例 3 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$,$\Phi(x)$满足

$$\Phi(0) = 0, \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant |x - y|, \quad x,y \in \mathbf{R}^1,$$

则 $\Phi[f(x)]$在 $\mathbf{R}^1$ 上可积.

(2) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1$ 上分别是一元连续函数,则存在 $f_n\in C(\mathbf{R}^2)(n\in\mathbf{N})$,使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y), \quad (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

证明 (1) 作 $f_n\in C_c(\mathbf{R}^1)$ $(n=1,2,\cdots)$($C_c(\mathbf{R}^1)$表示在 $\mathbf{R}^1$ 中具有紧支集的连续函数类),使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{a.e.}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^1} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|\mathrm{d}x <+ \infty.$$

从而有

$$\Phi[f(x)]-\Phi[f_1(x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\{\Phi[f_{n+1}(x)]-\Phi[f_n(x)]\}, \quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^1.$$

注意 $|\Phi[f_{n+1}(x)]-\Phi[f_n(x)]|\leqslant|f_{n+1}(x)-f_n(x)|$,即可得证.

(2) 不妨假定 $|f(x,y)|\leqslant M$(否则取反正切),作 $g(x,y) = \int_0^y f(x,t)\mathrm{d}t$, 则当 $|x|+|y|\leqslant R$ 时,有

$$\begin{aligned}
&|g(x + h,y + h) - g(x,y)| \\
&\quad\leqslant \int_0^{y+h} |f(x + h,t) - f(x,t)|\mathrm{d}t + \left|\int_0^{y+h} |f(x,t)|\mathrm{d}t \right.\\
&\qquad \left. - \int_0^y f(x,t)\mathrm{d}t\right| \\
&\quad\leqslant \int_0^R |f(x + h,t) - f(x,t)|\mathrm{d}t + \int_y^{y+h} |f(x,t)|\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由此知 $g\in C(\mathbf{R}^2)$. 再注意 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(x,y + h) - g(x,y)}{h} = f(x,y)$ 即可.

例 4 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$,作 $g(x)=f(x-1/x)(x\neq0)$,$g(0)=0$,则

$g\in L(\mathbf{R})^1$，且有 $\int_{\mathbf{R}^1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^1} g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$且 $f(x)\geqslant 0(x\in\mathbf{R}^1)$，则存在闭集列：$F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots$，使得

$$m\Big(\mathbf{R}^1\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Big)=0,\quad f\in C(F_n)\quad(n\in\mathbf{N}).$$

证明 (1) 注意到可用简单函数逼近的方法，我们只需指出积分等式对 $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)$成立即可. 为此，若令 $E=\{x:\ a\leqslant x-1/x\leqslant b\}$，则 $g(x)=\chi_E(x)$. 因为我们有表示式

$$E=\left[\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2},\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}\right]\cup\left[\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2},\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right],$$

所以得出 $\int_{\mathbf{R}^1} g(x)\mathrm{d}x=m(E)=b-a=\int_{\mathbf{R}^1} f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 取 $\varphi_n\in C(\mathbf{R}^1)(n\in\mathbf{N})$，使得 $\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x<4^{-n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)(x\in\mathbf{R}^1\setminus Z,m(Z)=0)$. 作开集列与闭集列：

$$\left.\begin{array}{l} G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_n\supset\cdots\supset Z,\ m(G_n)<2^{-n},\\ F_n=\bigcap\limits_{k\geqslant n}\{x:\ |\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|\leqslant 2^{-k}\}\setminus G_n\end{array}\right.\quad(n\in\mathbf{N}),$$

易知 $F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots$，且 $\varphi_n(x)$在 F_n 上一致收敛于 $f(x)$. 从而又知 $f\in C(F_n)(n\in\mathbf{N})$.

记 $A_k=\{x:\ |\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|>2^{-k}\}$，则 A_k 是开集，且有$\chi_{A_k}(x)\leqslant 2^k|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|$，$\chi_{A_k}\in L(\mathbf{R}^1)$，以及

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^1}\chi_{A_k}(x)\mathrm{d}x&\leqslant 2^k\int_{\mathbf{R}^1}|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2^k\Big(\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)-\varphi_{k+1}(x)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)-\varphi_k(x)|\mathrm{d}x\Big)\\ &\leqslant 2^{-k+1},\end{aligned}$$

$$\mathbf{R}^1\setminus F_n\subset G_n\cup\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\quad(k\in\mathbf{N}),$$

$$m(\mathbf{R}^1\setminus F_n)\leqslant m(G_n)+\sum_{k\geqslant n}m(A_k)\leqslant 2^{-n}+4\cdot 2^{-n},$$

从而可得 $m\Big(\mathbf{R}^1\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n\Big)=m\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\mathbf{R}^1\setminus F_n)\Big)=0$.

例 5 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset(0,2\pi)$是可测集，$\{\xi_n\}$是任一实数列，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\cos^2(nx+\xi_n)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m(E).$$

(2) (Riemann-Lebesgue 引理又一推广) 设 $f\in L((0,\infty))$，$[a_\lambda,b_\lambda]\subset(0,\infty)$是与正数 λ 有关的区间，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{a_\lambda}^{b_\lambda}f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

证明 (1) 注意等式

$$\cos^2(nx+\xi_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2nx\cdot\cos2\xi_n-\frac{1}{2}\sin2nx\cdot\sin2\xi_n,$$

并根据 Riemann-Lebesgue 引理可得证.

(2) 因为我们有等式

$$S_\lambda=\int_{a_\lambda}^{b_\lambda}f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=-\int_{a_\lambda-\pi/\lambda}^{b_\lambda-\pi/\lambda}f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos\lambda t\mathrm{d}t,$$

所以得到

$$2S_\lambda\leqslant\int_{a_\lambda}^{b_\lambda}\left|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}t+\int_{a_\lambda}^{a_\lambda+\pi/\lambda}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_{b_\lambda}^{b_\lambda+\pi/\lambda}|f(t)|\mathrm{d}t.$$

由此即可得证.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $\varphi(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的有界可测且以 $T>0$ 为周期的函数，$f\in L(I)$(I 是一个区间)，则

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_I f(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_I f(x)\mathrm{d}x\right).$$

(2) (Féjer)设 $\varphi(x)$同上，$\{\lambda_n\}$是实数列，$f\in L(\mathbf{R}^1)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\varphi(nx+\lambda_n)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x\right).$$

注 $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0(f\in L(\mathbf{R}^1))$.

证明 (1) 不妨假定$\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x=0$ $\left(\text{否则考查 }\psi(x)=\varphi(x)-\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x/T\right)$. 又设 $\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t$，则由 $\varphi(x)$的周期性以及

$\int_0^T \varphi(x)\mathrm{d}x=0$ 可知，$|\Phi(x)|\leqslant\int_0^T|\varphi(x)|\mathrm{d}x(x\in\mathbf{R}^1)$. 这说明 $\Phi(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上有界：$|\Phi(x)|\leqslant M(x\in\mathbf{R}^1)$. 从而对任意的区间 $J=[a,b]$，由

$$\int_J \varphi(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b}\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}[\Phi(\lambda b) - \Phi(\lambda a)],$$

可得 $\int_J \varphi(\lambda x)\mathrm{d}x\to 0(|\lambda|\to+\infty)$. 因此，对任意的阶梯函数的有限线性组合之函数 $g(x)$，也有

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_I g(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x = 0.$$

现在，对任给 $\varepsilon>0$，作 I 上的阶梯函数的线性组合 $g(x)$，使得 $\int_I|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon/M$. 我们有

$$\left|\int_I f(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_I|f(x)-g(x)||\varphi(\lambda x)|\mathrm{d}x+\left|\int_I g(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\varepsilon+\left|\int_I g(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x\right|.$$

由此即得所证.

(2) (i) 设 $f(x)=\chi_{[\alpha,\beta]}(x)$，且 $|\varphi(x)|\leqslant M(x\in\mathbf{R}^1)$，则

$$\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\varphi(nx+\lambda_n)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta\varphi(nx+\lambda_n)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{n}\int_{n\alpha+\lambda_n}^{n\beta+\lambda_n}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left(\frac{n(\beta-\alpha)}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x + A_n\right),$$

其中 $|A_n|\leqslant\int_0^T|\varphi(x)|\mathrm{d}x\leqslant MT$. 由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\varphi(nx+\lambda_n)\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

从而对 $f(x)$ 是阶梯函数命题结论也真.

(ii) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，则对任给 $\varepsilon>0$，可作阶梯函数 $h(x)$，使得 $\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)-h(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 记 $l=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x$，则由不等式

$$\left|\int_{\mathbf{R}^1}f(x)[\varphi(nx+\lambda_n)-l]\mathrm{d}x\right|<\left|\int_{\mathbf{R}^1}h(x)[\varphi(nx+\lambda_n)-l]\mathrm{d}x\right|+2M\varepsilon$$

易知

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbf{R}^1} f(x)[\varphi(nx+\lambda_n)-l]\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M\varepsilon.$$

例 7 设$\{r_n\}$，$\{\lambda_n\}$是实数列，作点集

$$E=\left\{x\in\mathbf{R}^1:\ \sum_{n=1}^{\infty}|r_n\cos(nx+\lambda_n)|<+\infty\right\},$$

若 $m(E)>0$，试证明$\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|<+\infty$.

证明 (i) 对 $k\in\mathbf{N}$，作点集

$$E_k=\left\{x\in\mathbf{R}^1:\ \sum_{n=1}^{\infty}|r_n\cos(nx+\lambda_n)|\leqslant k\right\},$$

显然有 $E_k\subset E_{k+1}(k\in\mathbf{N})$，$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 且 $m(E_k)\to m(E)(k\to\infty)$. 从而知存在 k_0，使得 $m(E_{k_0})>0$，且可作 E_{k_0}中的子集 F：$0<m(F)<+\infty$，推知

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|\int_F|\cos(nx+\lambda_n)|\mathrm{d}x\\&\qquad=\int_F\sum_{n=1}^{\infty}|r_n\cos(nx+\lambda_n)|\mathrm{d}x\leqslant k_0\cdot m(F)<+\infty.\end{aligned}$$

(ii) 注意到$|\cos x|$有周期 π，而且$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$，故引用 Féjer 公式(例 6 之(2)，取 $f(x)=\chi_F(x)$)，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_F|\cos(nx+\lambda_n)|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}m(F).$$

这导致$\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|<+\infty$.

§4.5 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

基 本 内 容

前面几节，我们已经基本上建立了 Lebesgue 的积分理论，在进一步介绍这一理论的其他内容以前，我们先来揭示它与 Riemann 积分的关系. 这一关系可以用一个公式来表达，它不仅说明 Lebesgue 积分是 Riemann 积分的一种推广，而且为一般有界函数的 Riemann 可积性提供了一个简明的判别准则. 本节仅讨论一维的

情形. 在这里要用到 Riemann 积分理论的下述事实：

设 $f(x)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的有界函数. $\{\Delta^{(n)}\}$ 是对 $[a,b]$ 所作的分划序列：

$$\Delta^{(n)}:\ a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b \quad (n = 1,2,\cdots),$$

$$|\Delta^{(n)}| = \max\{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}:\ 1 \leqslant i \leqslant k_n\},\ \lim_{n\to\infty}|\Delta^{(n)}| = 0.$$

若令（对每个 i 以及 n）

$$M_i^{(n)} = \sup\{f(x):\ x_{i-1}^{(n)} \leqslant x \leqslant x_i^{(n)}\},$$

$$m_i^{(n)} = \inf\{f(x):\ x_{i-1}^{(n)} \leqslant x \leqslant x_i^{(n)}\},$$

则关于 $f(x)$ 的 Darboux 上、下积分下述等式成立：

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}).$$

引理 设 $f(x)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的有界函数，记 $\omega(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅（函数），我们有

$$\int_I \omega(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

左端是 $\omega(x)$ 在 I 上的 Lebesgue 积分.

定理 1 若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的充分且必要条件是：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集.

定理 2 若 $f(x)$ 在 $I=[a,b]$ 上是 Riemann 可积的，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Lebesgue 可积的，其积分值相同.

我们以上说的是 $[a,b]$ 上有界函数的 Riemann 积分，对于无界函数的瑕积分以及无穷区间上的反常积分，情况就不同了，它原本是一种在 Cauchy 极限意义下的积分思想：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

而下述命题表明，此时 Lebesgue 积分指的是绝对收敛的积分.

定理 3 设 $\{E_k\}$ 是递增可测集合列，其并集是 E，

$$f \in L(E_k) \quad (k = 1,2,\cdots).$$

若极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x$ 存在，则 $f\in L(E)$，且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负函数，且对任给 $\varepsilon>0$，有 $f\in R([\varepsilon,1])$，则 $f\in L([0,1])$ 当且仅当存在极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $F\subset[0,1]$ 是闭集，且 $m(F)=0$，则 $\chi_F\in R([0,1])$.

(3) 设 $f\in R([a,b])$，$g\in R([a,b])$，$E\subset[a,b]$ 且 $\overline{E}=[a,b]$. 若 $f(x)=g(x)(x\in E)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证明 (1) 证略.

(2) 对 $x_0\in(0,1)$ 且 $x_0\overline{\in}F$，则存在 $\delta>0$，使得 $\chi_F(x)=0(x_0-\delta<x<x_0+\delta)$. 这说明 $\chi_F(x)$ 的不连续点集的测度为零.

(3) 设 Z_1,Z_2 是 $f(x),g(x)$ 的不连续点集，则 $m(Z_1\cup Z)=0$. 若 $x_0\overline{\in}Z_1\cup Z_2$，则由题设知存在 $\{x_n\}$：$x_n\to x_0(n\to\infty)$，使得 $f(x_n)=g(x_n)(n\in\mathbf{N})$，且有

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x_0).$$

这说明 $f(x)=g(x)(x\overline{\in}Z_1\cup Z_2)$. 证毕.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，其不连续点集记为 D. 若 D 只有可列个极限点，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数.

(2) 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的有界函数，若对于每一点 $x\in\mathbf{R}^1$，存在极限 $\lim\limits_{h\to0}f(x+h)$，则 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]$ 上均是可积的.

(3) 设 $f\in R([0,1])$，则 $f(x^2)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积.

证明 (1) 由题设可知，$f(x)$ 的不连续点集是可列集(参阅第一章).

(2) 由题设可推知，$f(x)$ 的不连续点集是可数集(参阅第一章).

(3) 注意 $g(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上是严格单调的，因此 $f(x^2)$ 与 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的不连续点集是相同的.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset[0,1]$，则 $\chi_E\in R([0,1])$ 当且仅当 $m(\overline{E}\setminus\mathring{E})=0$.

(2) 设 $f\in R([0,1])$ 且有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，$g\in C([a,b])$，则 $g[f(x)]$

在[0,1]上 Riemann 可积. 但反之则不一定.

证明 (1) 只需指出$\{x\in[0,1]: \omega(x)>0\}=\overline{E}\setminus\mathring{E}$,其中 $\omega(x)$是$\chi_E(x)$在[0,1]上的振幅函数.

(2) 记 $f(x)$的连续点集为 E. 若 $x_0\in E$,则因 $g(x)$是连续函数,所以 $g[f(x)]$在 $x_0\in E$ 处连续. 这说明 $g[f(x)]$的不连续点集必为零测集,证毕.

反之,作 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(r_i-2^{-2i},r_i+2^{-2i})(r_i\in\mathbf{Q},i\in\mathbf{N})$,且记 $F=[0,1]\setminus G$,则 F是闭集且无内点,$m(F)>0$. 现在作函数

$$f(x)=d(x,F),\quad g(x)=\chi_{\{0\}}(x),$$

则$f\in C([0,1])$,$g\in R([0,1])$,但我们有

$$g[f(x)]=\chi_F(x),$$

它在[0,1]上不是 Riemann 可积的.

例 4 解答下列问题:

(1) 试在[0,1]中作一零测集 Z,使得任意的 $f\in R([0,1])$的连续点集 $\mathrm{cont}(f)$与 Z 之交集均非空集.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上有原函数. 若$|f|\in R([a,b])$,试证明 $f\in R([a,b])$.

解 (1) 令$\{r_n\}=[0,1]\cap\mathbf{Q}$,且记($k\in\mathbf{N}$)

$$E_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n-2^{-(n+k)},r_n+2^{-(n+k)}),\quad E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k,$$

则 $m(E_k)\leqslant 2^{-(k-1)}(k\in\mathbf{N})$,$m(E)=0$. 因为 E 是 G_δ 型集,所以$[0,1]\setminus E$是 F_σ 型集. 因为连续点集 $\mathrm{cont}(f)$是[0,1]中的稠密 G_δ 集,所以 $\mathrm{cont}(f)$是第二纲集. 由于$[0,1]\setminus E_k(k\in\mathbf{N})$是无处稠密集,故

$$[0,1]\setminus E=\bigcup_{k=1}^{\infty}([0,1]\setminus E_k)$$

是第一纲集. 这说明 $\mathrm{cont}(f)\cap E\neq\varnothing$.

(2) 由题设知 $f(x)$的不连续点必是第二类间断点,再注意到函数 $f(x)$具有中间值性质,故该不连续点也是$|f(x)|$的间断点. 由于$|f(x)|$的不连续点集之测度为 0,而$|f(x)|$是有界的,故 $f(x)$有界,证毕.

§4.6 重积分与累次积分的关系

基本内容

研究重积分与累次积分的关系是数学分析中最重要的课题之一. 在 Riemann 积分的理论中,如果 $f(x,y)$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上连续,那么下述等式

$$\int_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$$

成立. 本节的目的是要在 Lebesgue 积分理论中建立类似的定理——Fubini 定理. 虽然它的证明要繁难一些,但由于在应用上的简便性,这一努力是有价值的.

(一) Fubini 定理

不失一般性,我们令 $n=p+q$,其中 p,q 是正整数,

$$\mathbf{R}^p:\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p);$$

$$\mathbf{R}^q:\ y=(\xi_{p+1},\xi_{p+2},\cdots,\xi_n);$$

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q:\ (x,y)=(\xi_1,\cdots,\xi_p,\xi_{p+1},\cdots,\xi_n).$$

并记定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 f 的积分为

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定理 1 (Tonelli, 非负可测函数的情形) 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上的非负可测函数,我们有

(1) 对于几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数是 $\mathbf{R}^q$ 上的非负可测函数;

(2) 记 $F_f(x)=\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$, 则 $F_f(x)$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上的非负可测函数;

(3) $\int_{\mathbf{R}^p}F_f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

注 1 在上述定理的条件下,也有结论

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

注 2 若 $f(x,y)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数,则可用 $f(x,y)\chi_E(x,y)$ 代替定理中的 $f(x,y)$,可得

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\chi_E(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理 2(Fubini, 可积函数的情形) 若 $f\in L(\mathbf{R}^n)$, $(x,y)\in\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$,则

(i) 对于几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$, $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^q$ 上的可积函数.

(ii) 积分 $\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上的可积函数.

(iii) $\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y)\mathrm{d}x$.

注 1 在被积函数变号且不知其是否可积时，不妨先取绝对值再进行讨论.

注 2 即使 $f(x,y)$ 的两个累次积分存在且相等，$f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上也可能是不可积的. 例如 $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)^2$，$(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$.

注 3 设 $f(x,y)=\begin{cases}1/x^2, & 0<y<x<1,\\ -1/y^2, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=-1$，以及

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = 1.$$

注 4 设 $f(x,y)$ 定义在 $I\times J$ 上，且有

(i) 取定 $x\in I$，$f(x,y)$ 在 J 上可积，而且 $\int_J f(x,y)\mathrm{d}y$ 是 $x\in I$ 上的可积函数；

(ii) 取定 $y\in J$，$f(x,y)$ 在 I 上可积，而且 $\int_J f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 J 上的可积函数，但 $f(x,y)$ 仍有可能不是二元可测函数.

注 5 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $\overline{E}=\mathbf{R}^1$，$f(x,y)$ 定义在 $\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1$ 上. 若对取定 $x\in E$，$f(x,y)$ 是 $y\in\mathbf{R}^1$ 上的可测函数；对 a. e. $y\in E$，$f(x,y)$ 是 $x\in\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，则 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1$ 上可测.

（二）积分的几何意义

大家知道，积分与测度是相通的，下面我们将通过（一）中的定理来讨论低维欧氏空间中点集与高维欧氏空间中点集之间的测度关系，并给出积分的几何意义.

定理 3 设 E 是 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的点集，对任意的 $x\in\mathbf{R}^p$，令

$$E_x = \{y\in\mathbf{R}^q:\ (x,y)\in E\},$$

称它为点集 E 在 x 处的**截段集**. 若 E 是可测集，则对几乎处处的 x，E_x 是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集，$m(E_x)$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上（几乎处处有定义的）的可测函数且有 $m(E)=\int_{\mathbf{R}^p} m(E_x)\mathrm{d}x$.

定理 4 若 E_1 与 E_2 是 $\mathbf{R}^p$ 与 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集，则 $E_1\times E_2$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中的可测集，且有 $m(E_1\times E_2)=m(E_1)\cdot m(E_2)$.

推论（可测函数图形的测度） 设 $f(x)$ 是 E 上的非负实值可测函数，作点集

$$G_E(f) = \{(x,y)\in\mathbf{R}^{n+1}:\ x\in E, y=f(x)\},$$

称它为 $y=f(x)$ 在 E 上的**图形**.（注意，E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，$G_E(f)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的点

集.)我们有 $m(G_E(f))=0$.

定理 5(积分的几何意义) 设 $f(x)$是 E 上的非负实值函数,记

$$\underline{G}(f)=\underline{G}_E(f)=\{(x,y)\in \mathbf{R}^{n+1}: x\in E, 0\leqslant y\leqslant f(x)\},$$

称它为 $y=f(x)$在 E 上的**下方图形**.我们有下述结论:

(i) 若 $f(x)$是可测函数,则$\underline{G}(f)$是 $\mathbf{R}^{n+1}$中的可测集,且有$m(\underline{G}(f))=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) 若 E 是可测集,$\underline{G}(f)$是 $\mathbf{R}^{n+1}$中的可测集,则 $f(x)$是可测函数,且有 $m(\underline{G}(f))=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.这正是 Riemann 积分中曲边梯形面积意义的推广.

(三) 卷积函数、分布函数

设 $f(x)$和 $g(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数,若积分

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

存在,则称此积分为 f 与 g 的**卷积**,记为$(f*g)(x)$.

注意,这里的 $f(x-y)$是$(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

定理 6 若 $f,g\in L(\mathbf{R}^n)$,则$(f*g)(x)$对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^n$ 存在,$(f*g)(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可积函数且有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|(f*g)(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|\mathrm{d}x\right).$$

定义 设 $f(x)$在 E 上可测,则称

$$f_*(\lambda)=m(\{x\in E: |f(x)|>\lambda\}),\quad \lambda>0$$

为 $f(x)$在 E 上的**分布函数**.显然,$f_*(\lambda)$是$(0,\infty)$上的递减函数.

定理 7 设 $f(x)$在 E 上可测,则对 $1\leqslant p<\infty$,有

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=p\int_0^\infty \lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L([0,\infty))$,$a>0$,则有

$$\int_0^{+\infty}\sin ax\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=a\int_0^{+\infty}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{a^2+y^2}.$$

(2) 对 $x\in\mathbf{R}^{n-1}(n>1)$,$t\in\mathbf{R}^1$,记$(x,t)$为

$$(x,t)=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},t)\in\mathbf{R}^n.$$

设 E 是 $\mathbf{R}^{n-1}$中可测集，$h>0$，点集

$$A=\{(\alpha z,\alpha h):\ z\in E, 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

是以 E 为底、高为 h 且顶点为 0 的锥，则 $m(A)=\dfrac{h}{n}m(E)$.

证明 (1) (i) 因为

$$\int_0^{+\infty}\sin ax\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+y^2}\quad(x>0),$$

所以只需阐明积分可交换次序.

(ii) 考查二元可测函数 $\sin ax\cdot f(y)\mathrm{e}^{-xy}$，它不是非负的，从而要研究它的可积性. 为此，取其绝对值并将对 x 的积分范围限于$[\delta,X]$：$0<\delta<X<+\infty$. 此时有

$$\begin{aligned}&\int_\delta^X\int_0^{+\infty}|\sin ax\cdot f(y)\mathrm{e}^{-xy}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\qquad\leqslant\int_\delta^X\int_0^{+\infty}|f(y)|\mathrm{e}^{-\delta y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant(X-\delta)\int_0^{+\infty}|f(y)|\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

这说明 $\sin ax\cdot f(y)\mathrm{e}^{-xy}$在$[\delta,X]\times[0,+\infty)$上可积. 于是我们有

$$\int_\delta^X\sin ax\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y\int_\delta^X\sin ax\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x.$$

(iii) 注意到(根据积分第二中值定理)

$$\left|\int_\delta^X\mathrm{e}^{-xy}\sin ax\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{a},\quad 0<\delta<X<+\infty,$$

由控制收敛定理即得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin ax\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y&=\lim_{\substack{\delta\to0\\X\to+\infty}}\int_\delta^X\sin ax\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\\&=\lim_{\substack{\delta\to0\\X\to+\infty}}\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y\int_\delta^X\sin ax\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\sin ax\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(2) 当$(x,t)\in A$ 时，即 $x=\alpha z, t=\alpha h$，也就是 $\alpha=t/h, \alpha z=tz/h$. 从而当 $0\leqslant tz\leqslant h$ 时，有

$$A_t\triangleq\{x\in\mathbf{R}^{n-1}:\ (x,t)\in A\}=\left\{\frac{t}{h}z:\ z\in E\right\}.$$

易知 $m(A_t)=(t/h)^{n-1}m(E)$，由此可得

$$m(A)=\int_{\mathbf{R}^n}\chi_A(u)\mathrm{d}u=\int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{d}t\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\chi_A(x,t)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{d}t\int_{A_t}1\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^1}m(A_t)\mathrm{d}t=\frac{m(E)}{h^{n-1}}\int_0^h t^{n-1}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{h}{n}m(E).$$

例 2 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积,则

$$I=\int_0^1\left[\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

(2) 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}(x^2+y^2>0)$,$f(0,0)=0$,则

$$I=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=0.$$

(3) 函数 $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上是可积的.

(4) 函数 $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2((x,y)\neq(0,0))$,$f(0,0)=0$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上不可积.

证明 (1) $I=\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\cdot\chi_{\{(x,y):\,y\leqslant x\}}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\chi_{\{(x,y):\,y\leqslant x\}}(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left[\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

(2) $f(x,y)$ 除点 $(0,0)$ 外皆连续,且有 $|f(x,y)|\leqslant 1((x,y)\in[0,1]\times[0,1])$,故 $f\in L([0,1]^2)$. 从而重积分可交换次序,而 $f(x,y)=-f(y,x)$,故知 $I=0$.

(3) 记 $D=[-1,1]\times[-1,1]$. 注意到积分等式 $(y\neq0)$

$$\int_{-1}^1\frac{|x|\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\ln\frac{1+y^2}{y^2},$$

$$\int_{-1}^1|y|\ln\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\ln\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}y^2$$
$$=\int_0^1\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x<+\infty,$$

我们得到(取绝对值后可交换积分次序)

$$\iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}|y|\mathrm{d}y\int_0^1 \frac{|x|\mathrm{d}x}{x^2+y^2} < +\infty.$$

(4) 我们有积分值估计

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_{\{(x,y):\ x,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1\}} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \geqslant \int_0^1\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\theta}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{r} = +\infty.$$

例 3 试证明下列积分公式:

(1) $I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}=2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$.

(2) $I=\iiint_X \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}=\pi\ln 2=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2\mathrm{d}z$,其中

$$X = \{0 < x,y < 1, 0 < z < +\infty\}.$$

(3) 设 $f:[0,1]\to[1,\infty)$,则

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\ln f(x)\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

证明 (1) 我们有等式(注意被积函数是非负的)

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{y^{-1/2}}{1+y}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x\sqrt{y})}{1+x^2y}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{y^{-1/2}}{1+y}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\pi = \frac{\pi^2}{2},$$

$$I = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\left(\ln\frac{1+x^2y}{1+y}\Big|_0^{+\infty}\right) = 2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x.$$

(2) 注意到被积函数是非负的,我们有

$$I = \iint_{\{0<x,y<1\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$$

$$= \iint\limits_{\{0<x,y<1\}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 - y^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2z^2} - \frac{y^2}{1+y^2z^2}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{2}\iint\limits_{\{0<x,y<1\}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x+y} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{x+y}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 [\ln(1+x) - \ln x]\mathrm{d}x = \pi\ln 2,$$

$$I = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}z \iint\limits_{\{0<x,y<1\}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2z^2}\right)^2\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2\mathrm{d}z.$$

(3) ($[0,1]^2 \triangleq [0,1]\times[0,1]$)不妨假定 $f\ln f\in L([0,1])$，则由

$$0\leqslant f(x)\leqslant\begin{cases} e, & f(x)\leqslant e, \\ f(x)\ln f(x), & f(x)>e, \end{cases} \quad 0\leqslant \ln f(x)\leqslant f(x)\ln f(x),$$

可知式(*)左端积分存在. 又由 $\ln t\leqslant t\ln t\,(t>0)$ 可知

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x\right) - \int_0^1 f(x)\ln f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{[0,1]^2} [f(x)\ln f(y) + f(y)\ln f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$- \frac{1}{2}\iint\limits_{[0,1]^2} [f(x)\ln f(x) + f(y)\ln f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{[0,1]^2} f(x)\left[\ln\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right) - \frac{f(y)}{f(x)}\ln\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 0.$$

例 4　解答下列命题：

(1) 设有定义在$[0,1]\times[0,1]$上的函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q}, \\ 2y, & x\,\overline{\in}\,\mathbf{Q}, \end{cases}$$

试求 $I=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 之值.

(2) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上非负可积，且有

$$I = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(4x)f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1,$$

试求 $J=\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x$ 之值.

(3) 设 $E\subset[0,1]\times[0,1]$,且令

$$A=\{(x_1/2,x_2/2):(x_1,x_2)\in E\},$$

$$B=\{(tx_1,tx_2,t)\in[0,1]^3:(x_1,x_2)\in E,t\in[0,1]\},$$

其中 $[0,1]^3\triangleq[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. 试求 $m(A)$ 与 $m(B)$ 的值.

解 (1) 注意到 $f(x,y)\geqslant 0$,我们有

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 2y\mathrm{d}x=1.$$

(2) 由积分等式(根据 Fubini 定理)

$$1=I=\int_{\mathbf{R}^1}f(4x)\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^1}f(x+y)\mathrm{d}y=\left(\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbf{R}^1}f(4x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbf{R}^1}f(4x)\mathrm{d}4x\right)=\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

可知 $J=2$.

(3) $$m(A)=\iint\limits_{[0,1]^2}\chi_A(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2=\iint\limits_{E}\chi_A\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2}\right)\frac{1}{4}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{1}{4}m(E),$$

$$m(B)=\iiint\limits_{[0,1]^3}\chi_B(z_1,z_2,z_3)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z_3\iint\limits_{[0,1]^2}\chi_B(z_1,z_2,z_3)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}t\iint\limits_{E}\chi_B(tx_1,tx_2,t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\cdot m(E)=\frac{m(E)}{3}.$$

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L((0,a))$,令 $g(x)=\int_x^a t^{-1}f(t)\mathrm{d}t\ (0<x<a)$,则 $g\in L((0,a))$,且有 $\int_0^a g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(x)$,$xf(x)$ 均在 $\mathbf{R}^1$ 上可积,且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$. 若令 $F(x)$

$=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$,则 $F\in L((-\infty,\infty))$.

(3) 设 $f(x)$,$g(x)$均在$[a,b]$上连续,且 $f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,令 $E=\{(x,y):\ x\in[a,b],f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$. 若 $h\in C(E)$,则 $h\in L(E)$,且有

$$\int_E h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\mathrm{d}y.$$

证明 (1) (i) 因为我们有

$$\int_0^a\left|\int_x^a f(t)t^{-1}\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a\left(\int_x^a|f(t)|t^{-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^a|f(t)|t^{-1}\left(\int_0^a\chi_{(x,a)}(t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_0^a|f(t)|t^{-1}\left(\int_0^t 1\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^a|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty,$$

故 $g\in L((0,a))$.

(ii) $$\int_0^a g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(\int_x^a f(t)t^{-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^a f(t)t^{-1}\left(\int_0^t 1\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 考查 $F(x)$在$[-A,B]$上的积分,我们有

$$\int_{-A}^B F(x)\mathrm{d}x=\int_{-A}^B\left(\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\int_t^B\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$
$$=B\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t.$$

由此即得所证.

(3) 因为 E 是有界闭集,$h(x,y)$是有界可测函数,所以 $h\in L(E)$. 此外又有

$$\int_E h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{f(x)}^{g(x)}h(x,y)\mathrm{d}y.$$

例 6 试证明下列命题:

(1) 设对于每个 $x\in[0,1]$均存在点集 $I_x\subset[0,1]$: $m(I_x)\geqslant 1/2$,以及二元可测函数

$$f(x,t)=\begin{cases}1, & x\in[0,1],\ t\in I_x,\\ 0, & x\in[0,1],\ t\overline{\in} I_x,\end{cases}$$

则存在 $t^*\in[0,1]$，$E\subset[0,1]$：$m(E)\geqslant 1/2$，使得 $f(x,t^*)=1(x\in E)$.

(2) 设 $f(x,y)$定义在 $I=(a,b)\times(c,d)$上，满足

(i) $f(x,y)$在 I 上连续；　　(ii) $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$存在且在 I 上连续；

(iii) 对某个 $x_0\in(a,b)$，在(c,d)上存在$\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y)$；

(iv) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)$存在且在 I 上连续，

则存在$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)$，且有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right).$$

证明　(1) 作可测集 $F=\{(x,t):x\in[0,1],t\in I_x\}$，我们有

$$m(F)=\int_0^1\int_0^1\chi_F(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^1 m(I_x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}.$$

从而知存在 $t^*\in[0,1]$以及 $E\subset[0,1]$，使得 $f(x,t^*)=1$.

(2) 应用 Fubini 定理以及微积分基本定理，易知对任意的 $\xi\in(a,b)$，$\eta\in(c,d)$以及 $s<\eta$，$t<\xi$，我们有

$$f(\xi,\eta)-f(t,\eta)-f(\xi,s)+f(t,s)=\int_s^\eta\int_t^\xi\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求偏导即可得证$\left(注意\int_t^\xi\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\mathrm{d}x 是 \xi 的连续函数\right)$.

例 7　解答下列问题：

设 $E=E_1\times E_2\subset\mathbf{R}^2$，且 E_1,E_2 是 $\mathbf{R}^1$ 中可测集，则称 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的可测矩形.

(1) 可作 $E\subset[0,1]\times[0,1]$且 $m(E)>0$，它不是可测矩形.

(2) 试证明 $E=\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y):x-y\in\mathbf{Q}\}$不包含任何正测度可测矩形.

解　(1) 在$[0,1]$中作类 Cantor 集 H：$m(H)>0$，以及 $S=\{(x,y):x-y\in H\}\subset[0,1]\times[0,1]$，易知 S 是紧集且 $m(S)>0$. 如果存在正测集 $A\subset[0,1]$，$B\subset[0,1]$，使得 $E\triangleq A\times B\subset S$，那么 $A-B\subset H$. 因为 $m(A)>0$，$m(B)>0$，所以 $A-B$ 有非空内点导致矛盾.

(2) 因为$(x,y)\in E$ 等价于 $x-y\overline{\in}\mathbf{Q}$，所以我们有 $A\times B\subset E$ 等价于$(A-B)\cap\mathbf{Q}=\varnothing$. 不妨假定 $0<m(A)+m(B)<+\infty$，而有

$$m(A \times B) > 0.$$

考查积分 $\int_{\mathbf{R}^1} \chi_A(x+y)\chi_B(y)\mathrm{d}y \triangleq f(x)$，易知 $f(x)$ 连续，且 $f(x) = 0(x+y \overline{\in} A, y \in B)$，即

$$\int_{\mathbf{R}^1} f(x)\mathrm{d}x = m(A) \cdot m(B) = m(A \times B) > 0.$$

从而 $f(x)$ 在 $A-B$ 的一个非空开子集 G 上不等于 0，$G \cap \mathbf{Q} \neq \varnothing$. 这导致矛盾.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 A, B 是 $\mathbf{R}^1$ 中的可测集，且 $m(A)>0, m(B)>0$，则 $A+B$ 中包含一个区间 I: $m(I)>0$.

(2) 设 $\{D_n\}$ 是含于平面上单位圆盘(闭)D 内的互不相交且半径为 $\{r_n\}$ 的(闭)圆盘列，若有 $m\left(D \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = +\infty$.

(3) 存在 $\mathbf{R}^2$ 中可测集 E，使 $E+E$ 不可测.

证明 (1) 因为我们有积分式

$$\int_{\mathbf{R}^1} m((\{x\} - B) \cap A)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^1}\left(\int_{\mathbf{R}^1} \chi_{(\{x\}-B)\cap A}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbf{R}^1}\left(\int_{\mathbf{R}^1} \chi_B(x-y)\chi_A(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = m(A) \cdot m(B) > 0,$$

所以存在 $x_0 \in \mathbf{R}^1$，使得 $m((\{x_0\}-B)\cap A)>0$. 由于 $f(x) \triangleq m((\{x\}-B)\cap A)$ 是连续函数，故 $\{x: m((\{x\}-B)\cap A)>0\}$ 是非空开集. 证毕.

(2) 记 D_n 在 x 轴上的投影为 I_n，则 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty} r_n$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < +\infty$，则几乎所有的 $x \in [-1,1]$ 仅属于有限个 I_n(即截口 I_x 仅与有限个 D_n 相交，不妨记为 $D_{n_i}(i=1,2,\cdots,k)$. 易知

$$\sum_{i=1}^{k} m(I_x \cap D_{n_i}) < m(I_x \cap D), \quad \text{a.e. } x \in [-1,1].$$

记 $E = D \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$，$f(x,y) = \chi_E(x,y)$，则对 a.e. $|x| \leqslant 1$，有

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}y > 0, \quad m(E) = \int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^1} f(x,y)\mathrm{d}y > 0.$$

(3) 记 $\mathbf{R}^1$ 中一个不可测集为 W，并作 $\mathbf{R}^2$ 中点集

$$E = \{W \times \{0\}\} \cup \{\{0\} \times W\}, \quad m(E) = 0.$$

易知 $E+E=A_1\cup A_2\cup A_3$，其中

$$A_1=\{\{W+W\}\times\{0\}\}, \quad A_2=\{\{0\}\times\{W+W\}\}, \quad A_3=\{W\times W\},$$

且 $m(A_1)=m(A_2)=0$，而 A_3 为不可测集（否则其几乎处处的截口皆为 $\mathbf{R}^1$ 中可测集）.

例 9 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，$m(E)<+\infty$. 若 $f(x)+g(y)$ 在 $E\times E$ 上可积，则 $f\in L(E)$，$g\in L(E)$.

(2) 设 E_1，E_2 是 $\mathbf{R}^2$ 中的正测集，则存在 $h_0>0$，使得

$$m(E_1 \cap (E_2 + \{h_0\})) > 0.$$

证明 (1) 由 Fubini 定理可知，对 a. e. $x\in E$，$f(x)+g(y)$ 作为 y 的函数在 E 上可积，故存在 $x_0\in E$，$f(x_0)+g(y)$ 在 E 上可积（$f(x_0)$ 是实值）. 由此即知 $g\in L(E)$. 同理可得 $f\in L(E)$.

(2) 易知 $m(E_1)=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\chi_{E_1}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$m(E_2)=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\chi_{E_2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$m(E_1\cap(E_2+\{h\}))=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\chi_{E_1}(x,y)\cdot\chi_{E_2}(x-s,y-t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, h=(s,t),$$

$\psi(s,t)=m(E_1\cap(E_2+\{h\}))$ 是连续函数，且有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\psi(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \iint\limits_{\mathbf{R}^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\chi_{E_1}(x,y)\cdot\chi_{E_2}(x-s,y-t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\mathbf{R}^2}\chi_{E_1}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\chi_{E_2}(x-s,y-t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \iint\limits_{\mathbf{R}^2}\chi_{E_1}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\chi_{E_2}(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = m(E_1)\cdot m(E_2) > 0.\end{aligned}$$

由此可知存在 $h_0=(s_0,t_0)$，使得 $\psi(s_0,t_0)>0$. 这说明

$$m(E_1 \cap (E_2 + \{h_0\})) > 0.$$

例 10 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集. 若对任意的有理数 $r\neq0$，均有 $rE\triangleq\{rx: x\in E\}=E$，试证明 $m(E)=0$ 或 $m(\mathbf{R}^1\setminus E)=0$.

证明 记 $\mathbf{R}_0=\mathbf{R}^1\setminus\{0\}$，$E_0=E\setminus\{0\}$，则对非 0 有理数 r，必有 $rE_0=E_0$，$r(\mathbf{R}_0\setminus E_0)=\mathbf{R}_0\setminus E_0$. 现在假定 $m(\mathbf{R}_0\setminus E_0)=m(\mathbf{R}^1\setminus E)>0$，则存在紧集 K_0：$K_0\subset\mathbf{R}_0\setminus E_0$，$m(K_0)>0$. 对任意的紧集 $K\subset E_0$，作函数

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}^0}\chi_{K_0}(y)\chi_{K^{-1}}\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

则 $f(x)$ 非负连续，且对非 0 有理数 r，有

$$f(r)=\int_{\mathbf{R}_0}\chi_{K_0}(y)\chi_{rK}(y)\frac{\mathrm{d}y}{y}\leqslant\int_{\mathbf{R}_0}\chi_{\mathbf{R}_0\setminus E_0}(y)\chi_{E_0}(y)\frac{\mathrm{d}y}{y}=0.$$

这说明 $f(x)=0(x\in\mathbf{R}_0)$. 因为

$$\int_{\mathbf{R}_0}\chi_{K_0}(y)\frac{\mathrm{d}y}{y}\cdot\int_{\mathbf{R}_0}\chi_{K^{-1}}(y)\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{\mathbf{R}_0}f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=0,$$

所以 $m(K^{-1})=0$. 由此知 $m(K)=0,m(E_0)=0$，即 $m(E)=0$.

例 11 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x),g(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上非负可测函数，且 $f\cdot g\in L(E)$. 令 $E_y=\{x\in E:\ g(x)\geqslant y\}$，则对一切 $y>0$，均存在函数 $F(y)=\int_{E_y}f(x)\mathrm{d}x$，且有 $\int_0^{+\infty}F(y)\mathrm{d}y=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $E\subset[0,1]\times[0,1]$ 是可测集. 若有

$$m(E_x)=m(\{y:\ (x,y)\in E\})\leqslant 1/2,\quad \text{a.e. } x\in[0,1],$$

则 $m(\{y:\ m(E_y)=1\})\leqslant 1/2$.

证明 (1) 注意到 $f(x),g(x)$ 的非负性，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}F(y)\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\left(\int_{E_y}f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_E f(x)\chi_{E_y}(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_E f(x)\left(\int_0^{+\infty}\chi_{E_y}(x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_E f(x)\left(\int_0^{g(x)}1\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 反证法. 假定 $m(\{y:\ m(E_y)=1\})>1/2$，则

$$\begin{aligned}m(E)&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 m(E_y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(\int_{\{y:\ m(E_y)=1\}}1\mathrm{d}y+\int_{\{y:\ m(E_y)\neq 1\}}m(E_y)\mathrm{d}y\right)>\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

但是我们有 $m(E)=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 m(E_x)\mathrm{d}x\leqslant 1/2$，导致矛盾.

例 12 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，$g(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上有界递增函数，则$(f*g)(x)$是有界递增且连续的函数.

(2) 设 $f\in C_c(\mathbf{R}^1)$，$g\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$，则 $f*g\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$，且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f*g)(x)=\left(f*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\right)(x).$$

(3) 设 $f\in C_c(\mathbf{R}^1)$，$P(x)$是多项式，则$(f*P)(x)$仍是多项式.

(4) 设 $\varphi(x)=(1-\cos x)\chi_{[0,2\pi)}(x)$，$\psi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t$，令 $f(x)=1$，$g(x)=\varphi'(x)$，则

(i) $(f*g)(x)=0(x\in\mathbf{R}^1)$；

(ii) $(f*\psi)(x)=(\varphi*\varphi)(x)>0(0<x<4\pi)$；

(iii) $((f*g)*\psi)(x)\equiv0\neq(f*(g*\psi))(x)$.

证明 略.

例 13 试证明下列命题：

(1) (**卷积是连续函数**) 设 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，$g(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上有界可测，则 $F(x)=(f*g)(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的一致连续函数.

(2) (**L 中无卷积单位**) $L(\mathbf{R}^1)$中不存在函数 $u(x)$，使得对一切 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，有

$$(u*f)(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^1. \tag{$*$}$$

证明 (1) 不妨设$|g(x)|\leqslant M$，$x\in\mathbf{R}^n$. 我们有

$$\begin{aligned}
&|F(x+h)-F(x)|\\
&=\left|\int_{\mathbf{R}^n}f(x+h-t)g(t)\mathrm{d}t-\int_{\mathbf{R}^n}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|f(x-t+h)-f(x-t)||g(t)|\mathrm{d}t\\
&\leqslant M\int_{\mathbf{R}^n}|f(t+h)-f(t)|\mathrm{d}t\to0\quad(h\to0),
\end{aligned}$$

即得所证.

(2) 应用反证法，假设存在 $u\in L(\mathbf{R}^1)$使$(*)$式成立. 首先可取 $\delta>0$，使得

$$\int_{-2\delta}^{2\delta}|u(x)|\mathrm{d}x<1.$$

其次对 $L(\mathbf{R}^1)$中函数 $f(x)=\chi_{[-\delta,\delta]}(x)$，易知

$$f(x) = (u * f)(x) = \int_{-\delta}^{\delta} u(x-y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x-\delta}^{x+\delta} u(t)\mathrm{d}t, \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^1.$$

因此,必有 $x_0 \in [-\delta, \delta]$,使得

$$1 = f(x_0) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} u(t)\mathrm{d}t.$$

然而,另一方面,我们又有

$$1 = \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} u(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |u(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{-2\delta}^{2\delta} |u(t)|\mathrm{d}t < 1.$$

这一矛盾说明,不存在 $u \in L(\mathbf{R}^1)$,使得对一切 $f \in L(\mathbf{R}^1)$,有

$$(u * f)(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^1.$$

例 14 试证明下列命题:

(1) 设 $E \subset \mathbf{R}^1$ 且 $0 < m(E) < +\infty$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上非负可测. 则 $f \in L(\mathbf{R}^1)$ 当且仅当 $g(x) = \int_E f(x-t)\mathrm{d}t$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上可积.

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上有界可测函数,且有

$$\int_0^{+\infty} [|f(x)| + |g(x)|]/x\mathrm{d}x < +\infty,$$

则

$$\int_0^{+\infty} |f(xy)g(y^{-1})|/y\mathrm{d}y < +\infty, \quad \text{a.e. } x \in (0,\infty).$$

证明 (1) 必要性 因为 $\chi_E \in L(\mathbf{R}^1)$,且有

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}^1} \chi_E(t) f(x-t)\mathrm{d}t,$$

所以 $g \in L(\mathbf{R}^1)$.

充分性 $+\infty > \int_{\mathbf{R}^1} \left(\int_{\mathbf{R}^1} \chi_E(t) f(x-t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$

$$= \int_{\mathbf{R}^1} \chi_E(t) \left(\int_{\mathbf{R}^1} f(x-t)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = m(E) \cdot \int_{\mathbf{R}^1} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 用替换 $x = \mathrm{e}^s$, $y = \mathrm{e}^t$,且记 $F(s) = f(\mathrm{e}^s)$, $G(t) = g(\mathrm{e}^t)$,我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\mathrm{e}^s)|\mathrm{d}s < +\infty.$$

对 $g(x)$ 也同样处理，即得 $F\in L(\mathbf{R}^1)$，$G\in L(\mathbf{R}^1)$. 从而可知

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{|f(xy)g(y^{-1})|}{y}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}|F(s+t)G(-t)|\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}|F(s-t)G(t)|\mathrm{d}t \\
&= F*G(s) \quad (\text{a.e. } x\in(0,\infty)).
\end{aligned}$$

附　　言

在本章的论述中我们看到，运用特征函数，可以把测度问题放到积分框架中来讨论，还可将众多不同的积分区域统一成相同的积分区域，从而为解决问题提供了极大的方便. 正是

特征函数是个宝，　测度积分架金桥，
不同区域可划一，　积分号下见分晓.

第五章　微分与不定积分

本章的目的是要在 Lebesgue 积分理论中推广微积分基本定理，并给出 Newton-Leibniz 公式成立的充分必要条件. 为简单起见，我们着重介绍 $\mathbf{R}^1$ 的情形.

§5.1　单调函数的可微性

基本内容

在点集测度理论的基础上，我们可以建立各种形式的集合覆盖定理，它们为深入研究函数的可微性提供了恰当的方法. 本节将介绍在 Vitali 意义下的覆盖定理，并由此证明 Lebesgue 的著名结论：单调函数是几乎处处可微的.

定义 1　设 $E\subset\mathbf{R}^1$，$\Gamma=\{I_\alpha\}$是一个区间族. 若对任意的 $x\in E$ 以及 $\varepsilon>0$，存在 $I_\alpha\in\Gamma$，使得 $x\in I_\alpha$，$|I_\alpha|<\varepsilon$，则称 Γ 是 E 在 Vitali 意义下的一个覆盖，简称为 E 的 **Vitali 覆盖**.

定理 1(Vitali 覆盖)　设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m^*(E)<\infty$，若 Γ 是 E 的 Vitali 覆盖，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在有限个互不相交的 $I_j\in\Gamma(j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$m^*\Big(E\setminus\bigcup_{j=1}^{n}I_j\Big)<\varepsilon.$$

定义 2　设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}^1$ 中点 x_0 的一个邻域上的实值函数，令

$$D^+f(x_0)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\quad D_+f(x_0)=\underline{\lim_{h\to0^+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D^-f(x_0)=\overline{\lim_{h\to0^-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\quad D_-f(x_0)=\underline{\lim_{h\to0^-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

分别称它们为 $f(x)$在 x_0 点的**右上导数，右下导数，左上导数，左下导数**. 总称为 **Dini(导)数**.

注　$D^+f(x_0)\geqslant D_+f(x_0)$，　$D^-f(x_0)\geqslant D_-f(x_0)$，

$D^+(-f)=-D_+(f)$，　$D^-(-f)=-D_-(f)$.

此外，若此四个 Dini 数皆等于同一个有限值，则 $f(x)$在 x_0 点是可微的；若 $D^+f(x_0)=D_+f(x_0)$为有限值，则 $f(x)$在 x_0 点的右导数存在；若 $D^-f(x_0)=$

$D_{-}f(x_0)$为有限值,则 $f(x)$在 x_0 点的左导数存在.

定理 2(Lebesgue) 若 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的单调上升(实值)函数,则 $f(x)$的不可微点集为零测集,且有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a).$$

定理 3(Fubini,逐项微分) 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的递增函数列,且$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上收敛,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$,Γ 是闭区间族,且依 Vitali 意义下覆盖 E,则存在$\{J_k\}\subset\Gamma$,使得 $m\left(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right)=0$.

(2) 设 $\Gamma=\{I_\alpha:\ \alpha\in J\}$是一个具有正长度的区间族,则 $E=\bigcup_{\alpha\in J} I_\alpha$ 是可测集.

证明 (1) 不妨假定 $E\subset(a,b)$,Γ 中每个区间也含于(a,b).

(i) 任取 $J_1\in\Gamma$. 若已取定 Γ 中的 $J_1,J_2,\cdots,J_k$,我们在 Γ 中记与 $J_1,\cdots,J_k$ 均不相交的一切区间长度之上确界为 δ_k,并取 $J_{k+1}\in\Gamma$ 满足

$$J_{k+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} J_i\right) = \varnothing, \quad m(J_{k+1}) > \delta_k/2.$$

(注意,若不存在如此之 J_{k+1},则结论自明.)

(ii) 作区间 J_k' 如下:它与 J_k 同中心,而 $m(J_k')=5m(J_k)$,易知当 $x_0\in(J_k')^c$,$x_1\in J_k$ 时,有 $d(x_0,x_1)\geqslant 2\cdot m(J_k)>\delta_{k-1}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(J_k') = 5\sum_{k=1}^{\infty} m(J_k) \leqslant 5(b-a).$$

(即上式左端级数收敛). 令 $A=E\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right)$. 若 $m(A)>0$,则存在 k_0,使得 $\sum_{k=k_0}^{\infty} m(J_k')<m(A)$. 从而存在 $x_0\in A$ 且 $x_0\in(J_k')^c\,(k\geqslant k_0)$,自然也有 $x_0\in(J_k)^c\,(k=1,2,\cdots,k_0)$. 由区间的闭性,可知存在 $J\in\Gamma$,使得 $x_0\in J$,

且 $J\cap J_k=\varnothing(k=1,2,\cdots,k_0)$. 从而知 $\delta_k\leqslant 2m(J_{k+1})\to 0(k\to\infty)$. 根据 δ_k 的定义，存在最小正整数 k_1，使得 $J\cap J_{k_1}\neq\varnothing, m(J)\leqslant\delta_{k_1-1}$. 从而有 $k_1>k_0$，得到

$$x_1\in J\cap J_{k_1},\quad x_0\in J\cap(J'_{k_1})^c,\quad m(J)\geqslant d(x_0,x_1)>\delta_{k_1-1}.$$

这一矛盾说明 $m(A)=0$.

注 Vitali 覆盖对 $\mathbf{R}^n$ 也真.

(2) 不妨设 $m^*(E)<+\infty$，且令

$$\mathscr{A}=\{I\subset\mathbf{R}^1:\ I\text{ 是某个 }I_\alpha\text{ 中的区间}\},$$

易知 $\mathscr{A}$ 是 E 的 Vitali 覆盖. 从而知存在互不相交区间列 $\{I_k\}$，使得 $m\left(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)=0$. 假设 $I_k\subset I_{\alpha_k}$，则由 $E=\left(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{\alpha_k}\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{\alpha_k}\right)$ 可知，E 可测.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $I_0\subset\mathbf{R}^n$ 是一个方体，$\Gamma=\{I_\alpha\subset I_0:\ \alpha\in J\}$ 是一族开方体，记 $K=\bigcup_{\alpha\in J}I_\alpha$，$E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集. 若对任一 I_α，均有 $m(E\cap I_\alpha)\geqslant 2m(I_\alpha)/3$，则

$$m(K\cap E)\geqslant(2/3)5^{-n}m(K).$$

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^2$，$\Gamma=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中一组开圆，且 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i\supset E$，则存在 Γ 中一组互不相交的开圆：$B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_m}$，使得 $\bigcup_{k=1}^{n}3B_{i_k}\supset E$.

证明 (1) 依题设知 $\delta_0=\sup\{\mathrm{diam}(I_\alpha):\ \alpha\in J\}<+\infty$. 采用 Vitali 覆盖定理的证明推理，可得互不相交的 $\{I_{\alpha_i}\}$，使得 $m(K)\leqslant 5^n\sum_{i=1}^{\infty}m(I_{\alpha_i})$. 从而我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}m(I_{\alpha_i})\leqslant\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{\infty}m(E\cap I_{\alpha_i})=\frac{3}{2}m\left(E\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{\alpha_i}\right),$$

由此得

$$m(E\cap K)\geqslant\frac{2}{3}5^{-n}m(K).$$

(2) 取 Γ 中半径最大的圆(记为)B_{i_1}，然后在与 B_{i_1} 不交的各圆中再取其半径最大的圆(记为)B_{i_2}. 如此继续操作，可得 $B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_m}$，且

易知 $\bigcup_{k=1}^{m} 3B_{i_k} \supset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. 由此即可得证.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset \mathbf{R}^1$, $f\in L(E)$, $E_0\subset E$ 是可测集且 $m(E_0)<+\infty$. 若对任意的 $x\in E_0$ 以及 $\delta>0$, 区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 内总存在子区间 $[\alpha,\beta]$: $x\in[\alpha,\beta]$, 使得 $\int_{[\alpha,\beta]\cap E_0} f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$, 则点集 $\{x\in E_0: f(x)<0\}$ 是零测集.

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$, $x_0\in I_\delta$(长为 δ 的区间). 若有

$$\lim_{\delta\to 0} m^*(I_\delta\cap E^c)/\delta = 0,$$

则称 x_0 为 E 之全密点. 若 E 中几乎所有点都是全密点, 则 E 是可测集.

证明 (1) 只需指出 $E_0^n=\{x\in E_0: f(x)<1/n\}$ $(n\in\mathbf{N})$ 为零测集. 记题设中由 E_0^n 中点所对应的一切 I_δ 之全体为 Γ, 则 Γ 是 E_0^n 的 Vitali 覆盖. 由此知对任给 $\varepsilon>0$, 存在互不相交之区间组: (α_1,β_1), (α_2,β_2), $\cdots$, (α_k,β_k), 使得 $\left(\text{记 } G=\bigcup_{i=1}^{k}(\alpha_i,\beta_i)\right)$

$$m(G)-\varepsilon<m(E_0^n)<m(G\cap E_0^n)+\varepsilon,$$

$$0\leqslant\int_G f(x)\mathrm{d}x=\int_{G\cap E_0^n} f(x)\mathrm{d}x+\int_{G\cap(E_0^n)^c} f(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

$$\int_{G\cap E_0^n} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\cdot m(G\cap E_0^n),$$

$$\int_{G\cap(E_0^n)^c} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n}m(G\cap E_0^n)>\frac{1}{n}m(E_0^n)-\frac{1}{n}\varepsilon.$$

从而知 $1/n\cdot m(E_0^n)<\int_{G\cap(E_0^n)^c} f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{n}\varepsilon$. 因为我们有 $m(G\cap(E_0^n)^c)$ $=m(G)-m(G\cap E_0^n)<2\varepsilon$, 所以 $m(E_0^n)=0$.

(2) 不妨假定 E 中一切点皆为全密点, 且 $E\subset(a,b)$.

(i) 对任给 $\varepsilon>0$ 以及 $x\in E$, 由于

$$\lim_{h\to 0}\frac{m^*((x-h,x+h)\cap E^c)}{2h}=0,$$

故对一切充分小的 $h>0$, 均有 $m^*((x-h,x+h)\cap E^c)<2h\cdot\varepsilon$, 这里还

可以设定$(x-h,x+h)\subset(a,b)$. 因此，对 E 中所有的 x 作出的上述区间族全体 Γ 构成 E 的一个 Vitali 覆盖. 从而知存在 Γ 中互不相交的区间列$\{I_n=(x_n-h_n,x_n+h_n)\}$，使得

$$G\triangleq\bigcup_{n\geqslant1}I_n\supset E\setminus Z,\quad m(Z)=0,$$

$$m^*(G\cap E^c)\leqslant m^*\Big(\bigcup_{n\geqslant1}(I_n\cap E^c)\Big)$$

$$\leqslant\sum_{n\geqslant1}m^*(I_n\cap E^c)\leqslant\sum_{n\geqslant1}2h_n\varepsilon=2\varepsilon\cdot\sum_{n\geqslant1}h_n<2(b-a)\varepsilon.$$

（注意，所有 I_n 均含于(a,b)且互不相交.）

(ii) 取 $\varepsilon_k=1/k(k\in\mathbf{N})$，由(i)知存在开集 G_k，使得$(m(Z)=0)$

$$G_k\supset E\setminus Z,\quad m^*(G_k\cap E^c)<2(b-a)/k\quad(k\in\mathbf{N}).$$

现在令 $G_0=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，则 $G_0\supset E\setminus Z$，且有

$$m^*(G_0\cap E^c)\overset{\text{fi}}{=}m^*\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k\cap E^c)\Big)\leqslant m^*(G_k\cap E^c)<\frac{2(b-a)}{k}.$$

令 $k\to\infty$，可知 $m(G_0\cap E^c)=0$，故 E 是可测集.

例 4 求下列函数 $f(x)$的 Dini 导数：

(1) $f(x)=x^{1/3}$； (2) $f(x)=|x|$； (3) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ 1, & x\overline{\in}\mathbf{Q};\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}ax\sin^2\dfrac{1}{x}+bx\cos^2\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\quad(a<b,a'<b').\\ a'x\sin^2\dfrac{1}{x}+b'x\cos^2\dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$

解 (1) $D_+f(0)=D^+f(0)=D_-f(0)=D^-f(0)=+\infty$.

(2) $D_+f(0)=D^+f(0)=1,D_-f(0)=D^-f(0)=-1$.

(3) 对 $x\in\mathbf{Q},D_+f(x)=0,D^+f(x)=+\infty,D_-f(x)=-\infty$, $D^-f(x)=0$；对 $x\overline{\in}\mathbf{Q},D^+f(x)=D_-f(x)=0,D_+f(x)=-\infty$, $D^-f(x)=+\infty$.

(4) 由于在区间$(1/(2n+2)\pi,1/2n\pi]$中 $\cos(1/x)$以及 $\sin(1/x)$可取到从-1 到$+1$ 之间的一切值，故知

$$D^+f(0)=\sup_{\theta}(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)=b.$$

类似地，有 $D_+f(0)=a$, $D_-f(0)=a'$, $D^-f(0)=b'$.

例 5 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in C([a,b])$，则存在 $x_0\in(a,b)$以及常数 k，使得

$$D_-f(x_0)\geqslant k\geqslant D^+f(x_0) \quad \text{或} \quad D^-f(x_0)\leqslant k\leqslant D_+f(x_0).$$

(2) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$，且令

$$f_t(x)=f(x+t)-f(x), \qquad -\infty<x,\ t<\infty.$$

若对任意的 $t\in(-\infty,\infty)$, $f_t(x)$对 $x\in(-\infty,\infty)$可微，则 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可微.

证明 (1) 记 $k=[f(b)-f(a)]/(b-a)$，并考查 $F(x)=f(x)-kx$. 易知 $F\in C([a,b])$，且有

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\frac{1}{b-a}[bf(a)-af(b)],$$

$$F(b)=\frac{1}{b-a}[bf(a)-af(b)]=F(a).$$

由此知存在 $x_0\in(a,b)$，使 $F(x_0)$是$[a,b]$上 $F(x)$的最大值或最小值. 从而得到

$$D_-F(x_0)\geqslant 0,\quad D^+F(x_0)\leqslant 0\ (x_0\text{ 为最大值点}),$$

$$D_+f(x_0)\geqslant 0,\quad D^-f(x_0)\leqslant 0\ (x_0\text{ 为最小值点}).$$

(注意，若 $\psi'(x_0)$存在，且 $g(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，则 $D^\pm g(x_0)=D^\pm\varphi(x_0)+\psi'(x_0)$, $D_\pm g(x_0)=D_\pm\varphi(x_0)+\psi'(x_0)$)，由此知存在 k，使得

$$D_-f(x_0)\geqslant k\geqslant D^+f(x_0) \quad (x_0\text{ 为最大值点});$$

$$D_+f(x_0)\geqslant k\geqslant D^-f(x_0) \quad (x_0\text{ 为最小值点}).$$

(2) (i) 首先对任意的两点 x'和 $x''=x'+t(-\infty<t<\infty)$，我们有等式

$$\begin{aligned}\frac{f(x''+h)-f(x'')}{h}&=\frac{f(x'+t+h)-f(x'+t)}{h}\\&=\frac{f(x'+t+h)-f(x'+h)-[f(x'+t)-f(x')]}{h}\\&\quad+\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}\\&=\frac{f_t(x'+h)-f_t(x')}{h}+\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}.\end{aligned}$$

由此和题设可知

$$D_{\pm}^{\pm} f(x'') = f_t'(x') + D_{\pm}^{\pm} f(x'),$$

且只要 $f(x)$在一点可微,就可知 $f(x)$处处可微了.

(ii) 根据本例(1),可知存在 k 以及 x_1,使得(不妨假定)

$$D_- f(x_1) \geqslant k \geqslant D^+ f(x_1).$$

从而对任意的 $x=x_1+t$ $(-\infty<t<\infty)$,有

$$\begin{aligned} D_- f(x) &= f_t'(x_1) + D_- f(x_1) \\ &\geqslant f_t'(x_1) + D^+ f(x_1) = D^+ f(x). \end{aligned}$$

(iii) 不妨假定 $f(x)$不是上凸函数,(否则就有可微点了)则存在区间$[a,b]$,使得在$[a,b]$上 $f(x)$位于点$(a,f(a))$与点$(b,f(b))$联结线的下方. 现在记

$$F(x) = f(x) - lx, \quad l = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

则易知存在 $x_2 \in (a,b)$,使得 $F(x)$在 $x=x_2$ 处取得最小值. 由此得

$$D^- F(x_2) \leqslant 0, \quad 即 \quad D^- f(x_2) \leqslant l;$$

$$D_+ F(x_2) \geqslant 0, \quad 即 \quad D_+ f(x_2) \geqslant l.$$

从而对任意的 $x \in (-\infty,\infty)$,又有

$$D^- f(x) \leqslant D_+ f(x).$$

(iv) 综合上述结论,我们有

$$D_- f(x) = D^- f(x) = D_+ f(x) = D^+ f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

这说明 $f'(x)$有意义,从而 $f(x)$就有可微点了.

例 6 试证明下列命题:

(1) 存在$[0,1]$上的严格递增函数 $f(x)$,使得 $f'(x)=0$,a.e. $x \in [0,1]$.

(2) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的非负函数. 若 $f \overline{\in} L([a,b])$,则 $f(x)$在$[a,b]$上没有原函数(例如 $f(x)=x^{-2}\sin^2(x^{-5})$在$[-1,1]$上没有原函数).

(3) 设$\{f_n(x)\}$是$(0,1)$上的递增函数列. 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=1$,a.e. $x \in (0,1)$,则

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in (0,1).$$

证明 (1) 记$(0,1)\cap\mathbf{Q}=\{r_n\}$,并作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<r_n,\\ 1/2^n, & r_n\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots),$$

易知$f_n(x)$在$[0,1]$上递增,且$f_n'(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$. 再作函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

显然,$f(x)$在$[0,1]$上严格递增,且$0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 从而根据Fubini逐项微分定理可知

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

(2) 反证法. 假定$f(x)$在$[a,b]$上有原函数$F(x)$: $F'(x)=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$,则因$F'(x)\geqslant 0$,所以$F(x)$在$[a,b]$上递增. 从而有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x\leqslant F(b)-F(a).$$

这说明$f\in L([a,b])$,与题设矛盾.

(3) 由题设知,存在$\{a_k\},\{b_k\}$: $0<a_k<b_k<1$,使得

$$\lim_{n\to\infty}(b_k-a_k)=1,\quad \lim_{n\to\infty}f_n(a_k)=\lim_{n\to\infty}f_n(b_k)=1.$$

应用Fatou引理,我们有

$$\begin{aligned}\int_{a_k}^{b_k}\varliminf_{n\to\infty}f_n'(x)\mathrm{d}x&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{a_k}^{b_k}f_n'(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\varliminf_{n\to\infty}[f_n(b_k)-f_n(a_k)]=1-1=0.\end{aligned}$$

令$k\to\infty$可得$\int_0^1\varliminf_{n\to\infty}f_n'(x)\mathrm{d}x=0$,由此又有$\varliminf_{n\to\infty}f(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$.

例7 试证明下列命题(应用Riesz右升点定理):

(1) 设$f\in C([a,b])$. 若(a,b)中任一点x处的右Dini导数之一是非负的,则$f(a)\leqslant f(b)$.

(2) 若$[a,b]$中的x的右Dini导数之一位于$[c,d]$内,则对任意的$x_1,x_2\in[a,b]$,均有

$$c\leqslant[f(x_2)-f(x_1)]/(x_2-x_1)\leqslant d.$$

(3) 若$f(x)$在$x_0\in(a,b)$处的Dini导数之一在x_0处连续,则

$f'(x_0)$存在.

证明 (1) 注意 $x\in(a,b)$皆为右升点.

(2) 用(1),且令 $F(x)=f(x)-cx$.

(3) 例如右上导数,则可证

$-\varepsilon<[f(x_2)-f(x_1)]/(x_2-x_1)<\varepsilon \quad (x_1,x_2\in U(x_0)).$

例 8 设 $f(x)$是(a,b)上的递增函数,$E\subset(a,b)$. 若对任给 $\varepsilon>0$,存在$(a_i,b_i)\subset(a,b)(i=1,2,\cdots)$,使得

$$\bigcup_{i\geqslant 1}(a_i,b_i)\supset E,\quad \sum_{i\geqslant 1}[f(b_i)-f(a_i)]<\varepsilon,$$

试证明 $f'(x)=0$,a. e. $x\in E$.

证明 依题设我们有

$$\int_E f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\bigcup\limits_{k\geqslant 1}(a_k,b_k)}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k\geqslant 1}\int_{a_k}^{b_k}f'(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\sum_{k\geqslant 1}[f(b_k)-f(a_k)]<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性,可知 $\int_E f'(x)\mathrm{d}x=0$,从而即得所证.

例 9 设 $E\subset(a,b)$且 $m(E)=0$,试证明存在$[a,b]$上是连续且单调上升的函数 $f(x)$,使得 $f'(x)=+\infty,x\in E$.

证明 事实上,对每一个自然数 n,我们可以取一个包含 E 的有界开集 G_n,使得 $m(G_n)<1/2^n$,并作函数列

$$f_n(x)=m([a,x]\cap G_n),\quad x\in[a,b]\quad(n=1,2,\cdots).$$

显然,每个 $f_n(x)$都是非负的单调上升函数且 $f_n(x)<1/2^n$. 由于

$$f_n(x+h)-f_n(x)\leqslant|h|\quad(|h|\text{ 充分小}),$$

故知 $f_n(x)$是连续函数. 现在再作函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),\quad x\in[a,b].$$

它是非负连续且单调上升的函数. 若 $x\in E$,则对于任意指定的自然数 k,可取$|h|$充分小,使得

$$[x,x+h]\subset G_n,\quad n=1,2,\cdots,k,$$

并保证$[x,x+h]\subset(a,b)$. 此时有

$$\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=1,\quad n=1,2,\cdots,k.$$

从而得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant\sum_{n=1}^{k}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=k.$$

这说明当 $x\in E$ 时，$f'(x)=+\infty$.

注 上例表明，单调函数是几乎处处可微的这一结论，一般说来是不能改进的.

例 10 设 $f(x)$是$[a,b]$上的递增函数，且值域 $R(f)=[c,d]$. 若存在 $E\subset[a,b]$且 $m(E)=0$，使得 $m(f(E))=d-c$，则 $f'(x)=0$, a. e. $x\in[a,b]$.

证明 依题设知 $f\in C([a,b])$且几乎处处可微. 不妨假定 $a,b\in E$. 采用反证法. 若有

$$A=\{x\in[a,b]:f'(x)\geqslant M>0\},\quad m(A)=r>0,$$

则存在闭集 $B\subset A\setminus E$：$m(B)\geqslant r/2$，$f'(x)\geqslant M(x\in B)$. 从而对 $x\in B$，存在 $\delta_x>0$，使得

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geqslant\frac{M}{2},\quad |y-x|<\delta_x.$$

$(f(E)\cap f(B)=\varnothing)$对 $\varepsilon>0$，可作开区间族$\{I_\alpha\}$：

$$\bigcup_\alpha m(I_\alpha)<\varepsilon,\quad f(B)\subset\bigcup_\alpha I_\alpha.$$

对 $x\in B$，存在 α_x，使得 $f(x)\in I_{\alpha_x}$，且由 $f'(x)\geqslant M$，可选 $a_x,b_x\in[a,b]$，使得

$$f(x)\in(f(a_x),f(b_x))\subset I_{\alpha_x},\quad a_x<x<b_x,$$

其中 $x-a_x<\delta_x$，$b_x-x<\delta_x$. 从而 $f(b_x)-f(a_x)\geqslant M(b_x-a_x)/2$. 这样，$\{(a_x,b_x)\}$形成 B 的覆盖，故存在有限子覆盖：$\{(a_{x_i},b_{x_i})\}_{i=1,2,\cdots,m}$且使 B 中无点同属于两个小区间. 因此得到

$$2\varepsilon>2\sum_\alpha m(I_\alpha)\geqslant M\sum_{i=1}^{m}(b_{x_i}-a_{x_i})\geqslant M\cdot m(B)\geqslant Mr/2.$$

这一矛盾导致结论成立.

例 11 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的递增函数，试证明存在$[a,b]$上的阶梯函

数列$\{f_n(x)\}$：$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

（2）记$\{r_n\}\subset\mathbf{R}^n$是有理数列，且设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|x-r_n|/n^2$，试求$f'(x)$的表达式.

解 （1）令$f_n(x)=[nf(x)]/n$，我们有

$$f(x)-\frac{1}{n}\leqslant f_n(x)\leqslant f(x)+\frac{1}{n},$$

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{2n}\quad(a\leqslant x\leqslant b,n\in\mathbf{N}),$$

由此即可得证.

（2）注意到$f(x)=\sum_{r_n<x}(x-r_n)/n^2+\sum_{x\leqslant r_n}(r_n-x)/n^2$，以及$\varphi(x)=(x-r_n)$，$\psi(x)=-(r_n-x)$均为递增函数，故根据 Fubini 定理，可知

$$f'(x)=\sum_{r_n<x}\frac{1}{n^2}-\sum_{r_n\geqslant x}\frac{1}{n^2},\quad\text{a.e. }x\in\mathbf{R}^1.$$

§5.2 有界变差函数

基本内容

定义 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的实值函数，作分划Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$以及相应的和

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|,$$

称为$f(x)$在$[a,b]$上的**变差**，作

$$\bigvee_a^b(f)=\sup\{v_\Delta:\Delta\text{为}[a,b]\text{的任一分划}\},$$

并称它为f在$[a,b]$上的**全变差**. 若$\bigvee_a^b(f)<\infty$，则称$f(x)$是$[a,b]$上的**有界变差函数**(即全体变差形成有界数集)，其全体记为$\mathrm{BV}([a,b])$.

定理 1 若$f(x)$是$[a,b]$上的实值函数，$a<c<b$，则

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

定理 2(**Jordan 分解**) $f\in\mathrm{BV}([a,b])$当且仅当$f(x)=g(x)-h(x)$，其中$g(x)$与$h(x)$是$[a,b]$上的单调上升(实值)函数.

注 设 $\alpha>0,\beta>0,f(x)=x^{\alpha}\cos(1/x^{\beta})(0<x\leqslant 1)$，且 $f(0)=0$，则

(1) $f\in \mathrm{BV}([0,1])$当且仅当 $\alpha>\beta$.

(2) $f\in \mathrm{Lip}^{1}([0,1])$当且仅当 $\alpha\geqslant\beta+1$.

(3) 若 $\alpha<\beta+1$，则 $f\in \mathrm{Lip}^{\gamma}([0,1]),\gamma=\alpha/(\beta+1)$.

(4) 设 $f(x)=1/\ln(2/x)(0<x\leqslant 1),f(0)=0$，则 $f\in C([0,1])\cap \mathrm{BV}([0,1])$，但 $f\in \mathrm{Lip}^{\alpha}([0,1]),\alpha>0$.

(5) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x}\cos(\mathrm{e}^{1/x})(0<x\leqslant 1),f(0)=0$，则 $f\in C([0,1]),f\overline{\in}$ $\mathrm{BV}([0,1])$，但对 $\alpha<1,f\in \mathrm{Lip}^{\alpha}([0,1])$.

(6) 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$，且 $|f(x)|\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $1/f\in \mathrm{BV}([a,b])$.

(7) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f\in \mathrm{BV}([-1,1]),g\in$ $\mathrm{BV}([-1,1])$，但 $f[g(x)]$在$[-1,1]$上不是有界变差函数.

(8) 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $f_n(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x}, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{n},\end{cases}$ 则 $f_n\in \mathrm{BV}([0,1])$，且 $f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于 $f(x)$，但 $f\overline{\in}\mathrm{BV}([0,1])$.

(9) 可作连续函数，它在任一区间上均非有界变差. 也存在有界变差函数，但在任一区间上均不连续.

典型例题精解

例 1 解答下列问题：

(1) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的单调函数，试求 $\bigvee_a^b(f)$之值.

(2) 试求(i) $\bigvee_0^{4\pi}(\cos x)$；　(ii) $\bigvee_{-1}^{1}(x-x^3)$之值.

(3) $f(x)=x\sin(\pi/x)(0<x\leqslant 1),f(0)=0$ 在$[0,1]$上不是有界变差函数.

(4) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微，且(a,b)内 $f'(x)=0$ 的点可排列为

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b,$$

试计算 $\bigvee_a^b(f)$.

解 (1) 注意，对$[a,b]$的任一分划 Δ，均有 $v_\Delta=|f(b)-f(a)|$，故

$$\bigvee_a^b(f)=|f(b)-f(a)|.$$

(2) (i) 将$[0,4\pi]$分划成若干小区间，使 $\cos x$ 在每个小区间上成为单调函数，即可得证 $\bigvee_0^{4\pi}(\cos x)=8$.

(ii) 用$(x-x^3)$的零点$-1,0,1$分划$[-1,1]$为三个小区间，极值点为 $x=\pm\sqrt{3}/3$，再以其极小值$-2\sqrt{3}/9$，极大值$2\sqrt{3}/9$来计算变差，易知

$$\bigvee_{-1}^{1}(x-x^3)=8\sqrt{3}/9.$$

(3) 作 Δ: $0<\dfrac{2}{2n-1}<\dfrac{2}{2n-3}<\cdots<\dfrac{2}{3}<1$，则

$$v_\Delta=\frac{2}{2n-1}+\left(\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-3}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$$

$$=2\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{2k-1}.$$

从而可知当 $n\to\infty$时，$v_\Delta\to+\infty$，即 $\bigvee_a^b(f)=+\infty$.

(4) $$\bigvee_a^b(f)=|f(a)-f(x_1)|+\sum_{i=2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(b)-f(x_n)|.$$

例 2 试证明下列命题：

(1) $\bigvee_a^b(f)=0$ 当且仅当 $f(x)=C$(常数).

(2) 设 $f\in BV([a,b])$，$g\in BV([a,b])$，则 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$是$[a,b]$上的有界变差函数.

(3) 设 $f\in BV([a,b])$，则$|f|\in BV([a,b])$，但反之不然.

(4) 设$|f(x)|$是$[a,b]$上的有界变差函数. 若 $f\in C([a,b])$，则 $f\in BV([a,b])$，且有 $\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^b(|f|)$.

(5) 设 $f,g\in BV([a,b])$.

(i) $\bigvee_a^b(fg)\leqslant\sup_{[a,b]}\{f(x)\}\ \bigvee_a^b(f)+\sup_{[a,b]}\{g(x)\}\ \bigvee_a^b(f)$.

(ii) 若又有 $f(a)=0=g(a)$，则 $\bigvee_a^b(f\cdot g)\leqslant\bigvee_a^b(f)\cdot\bigvee_a^b(g)$.

(6) 若 $f\in \mathrm{Lip}1([a,b])$，则 $f\in BV([a,b])$.

(7) 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$，$\varphi(x)$在$(-\infty,\infty)$上属于 Lip1，则 $\varphi[f]\in \mathrm{BV}([a,b])$.

证明 (1) 充分性 显然.

必要性 因为对任意的 $x\in[a,b]$，均有 $|f(x)-f(a)|\leqslant \bigvee_a^b(f)=0$，所以得到 $f(x)=f(a)(a\leqslant x\leqslant b)$.

(2) 注意 $\max\{a,b\}=[a+b+|a-b|]/2$.

(3) 注意到 $||f(x|-|f(y)||\leqslant|f(x)-f(y)|$，故若 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$，则有 $|f|\in \mathrm{BV}([a,b])$. 反之，例如 Dirichlet 函数 $D(x)$，它不是有界变差函数，但 $|D(x)|=1$ 则是有界变差函数.

(4) 只需指出 $\bigvee_a^b(f)\leqslant \bigvee_a^b|f|$. 为此，对分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，考查 $v_\Delta=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$：

(i) 若 $f(x_i)$与 $f(x_{i-1})$同号，则有

$$||f(x_i)|-|f(x_{i-1})||=|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

(ii) 若 $f(x_i)$与 $f(x_{i-1})$反号，则取 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，使得 $f(\xi_i)=0$，从而可知

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant||f(x_i)|-|f(\xi_i)||+||f(x_{i-1})|-|f(\xi_i)||.$$

再作分划 Δ'：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<\xi_i<x_i<\cdots<x_n=b$，我们有 $v_{\Delta'}=v_\Delta\leqslant \bigvee_a^b(|f|)$.

(5) (i) 注意公式 $a_1a_2-b_1b_2=a_1(a_2-b_2)+(a_1-b_1)b_2$.

(ii) 作标准分解 $f(x)=P(x)-N(x)$，其中

$$P(x)=\frac{1}{2}\Big[\bigvee_a^x(f)+f(x)-f(a)\Big],$$

$$N(x)=\frac{1}{2}\Big[\bigvee_a^x(f)-f(x)+f(a)\Big],$$

此时有 $\bigvee_a^b(f)=P(b)+N(b)$（一般分解 $f=g_1-g_2$，均为 $\bigvee_a^b(f)\leqslant g_1(b)+g_2(b)$）. 现在假定 $f(x)$，$g(x)$的标准分解为 $f(x)=P_1(x)-N_1(x)$，$g(x)=P_2(x)-N_2(x)$，则

$$f(x)g(x)=[P_1(x)P_2(x)+N_1(x)N_2(x)] \\ -[P_1(x)N_2(x)+N_1(x)P_2(x)].$$

从而得

$$\begin{aligned}\bigvee_a^b(fg)&\leqslant[P_1(b)P_2(b)+N_1(b)N_2(b)] \\ &\quad+[P_1(b)N_2(b)+N_1(b)P_2(b)] \\ &=[P_1(b)+N_1(b)][P_2(b)+N_2(b)] \\ &=\bigvee_a^b(f)\cdot\bigvee_a^b(g).\end{aligned}$$

(6) 依题设知存在 $M>0$,使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|\quad(a\leqslant x,y\leqslant b).$$

由此知对$[a,b]$的任一分划 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,均有

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant M\sum_{i=1}^n|x_i-x_{i-1}|=M(b-a).$$

这说明 $\bigvee_a^b(f)\leqslant M(b-a)$.

(7) 由题设知存在 $M>0$,使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|\quad(-\infty<x,y<+\infty).$$

从而对$[a,b]$的任一分划 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,我们有

$$\begin{aligned}v_\Delta&=\sum_{i=1}^n|\varphi(f(x_i))-\varphi(f(x_{i-1}))|\leqslant\sum_{i=1}^n M|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &=M\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant M\bigvee_a^b(f).\end{aligned}$$

例 3 试证明下列命题:

(1) 若 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$,则 $f(x)$几乎处处可微,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\bigvee_a^x(f)\right)=|f'(x)|,\quad \text{a. e. } x\in[a,b].$$

(2) 若 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$,则(弧长) $l_f\geqslant\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$.

证明 (1) (i) 根据全变差的定义可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在分划

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b,$$

使得

$$\bigvee_a^b(f) - \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon, \qquad (*)$$

我们可以作出$[a,b]$上的函数$g(x)$，使得

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + c_i, & f(x_i) \geqslant f(x_{i-1}), \\ -f(x) + c_i', & f(x_i) < f(x_{i-1}), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \in [x_{i-1}, x_i] \\ i = 1,2,\cdots,k \end{pmatrix}$$

其中c_i, c_i' $(i=1,2,\cdots,k)$是常数.

实际上，首先，对$x \in [a, x_1]$，令

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(a_0), & f(x_1) \geqslant f(a_0), \\ -f(x) + f(a_0), & f(x_1) < f(a_0). \end{cases}$$

其次，用归纳法，若在$[a, x_i]$ $(i<k)$上已定义了$g(x)$，则对$x \in (x_i, x_{i+1}]$，定义

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + [g(x_i) - f(x_i)], & f(x_{i+1}) \geqslant f(x_i), \\ -f(x) + [g(x_i) + f(x_i)], & f(x_{i+1}) < f(x_i). \end{cases}$$

对如此作成的$g(x)$，易知对每个$[x_{i-1}, x_i]$，或$g(x) - f(x)$或$g(x) + f(x)$是常数，且$|g'(x)| = |f'(x)|$, a.e. $x \in [a,b]$. 又由式$(*)$可得

$$\bigvee_a^b(f) - g(b) < \varepsilon,$$

以及$\bigvee_a^x(f) - g(x)$是$[a,b]$上的递增函数.

(ii) 由(i)知，对$\varepsilon = 1/2^n$，存在$[a,b]$上的函数列$\{g_n(x)\}$，使得

$$\bigvee_a^b(f) - g_n(b) < \frac{1}{2^n}, \quad |g_n'(x)| = |f'(x)|, \text{ a.e. } x \in [a,b].$$

这说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bigvee_a^x(f) - g_n(x)\right) < +\infty, \quad x \in [a,b].$$

引用 Fubini 逐项微分定理，可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f) - g_n'(x)\right] < +\infty, \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

由于$|g_n'(x)| = |f'(x)|$, a.e. $x \in [a,b]$，且$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f) \geqslant 0$, a.e. $x \in [a,b]$，故我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)=|f'(x)|,\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

(2) 实际上,记 $l_f(x)$是在$[a,x]$上曲线 $y=f(x)$的弧长($a\leqslant x\leqslant b$),易知对 $a\leqslant x<y\leqslant b$,有

$$l_f(y)-l_f(x)\geqslant\sqrt{(y-x)^2+[f(y)-f(x)]^2}>0,$$

即 $l_f(x)$在$[a,b]$上递增. 由于

$$\frac{l_f(y)-l_f(x)}{y-x}\geqslant\sqrt{1+\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)^2},$$

故得

$$l_f'(x)\geqslant\sqrt{1+[f'(x)]^2},\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

从而我们有

$$l_f(b)\geqslant\int_a^b l_f'(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

例 4 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C([a,b])$以及 $0\leqslant\bigvee_a^b(f)\leqslant+\infty$,则对任意的 λ: $0<\lambda<\bigvee_a^b(f)$,均存在 $\delta>0$,当分划 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 满足 $\|\Delta\|=\max\{x_i-x_{i-1}: i=1,2,\cdots,n\}<\delta$ 时,有

$$\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|>\lambda. \tag{*}$$

(2) 设 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$,$E=\{x_i\}\subset[a,b]$. 若 $f(x)=0(x\neq x_i)$,则 $f'(x)=0$,a.e. $x\in[a,b]$.

证明 (1) 由题设知,存在 $\delta>0$ 与分划 Δ': $a=t_0<\cdots<t_p=b$,使得

$$v_{\Delta'}=\sum_{j=1}^p|f(t_j)-f(t_{j-1})|>\lambda,\quad \|\Delta'\|<\delta,$$

且有($f\in C([a,b])$)

$$|f(x)-f(y)|<(v_{\Delta'}-\lambda)/2p\quad (x,y\in[a,b]\text{且}|x-y|<\delta).$$

现在,对满足$\|\Delta'\|<\delta$ 的分划 Δ',相应于(*)式中的第 i 项与 Δ'中的 j 项满足 $y_{j-1}\leqslant x_{i-1}<x_i\leqslant y_j$,有

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|>|f(y_j)-f(y_{j-1})|-(v_{\Delta'}-\lambda)/p.$$

从而可得

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|>\sum_{j=1}^{p}|f(y_j)-f(y_{j-1})|-(v_{\Delta'}-\lambda)$$

$$=v_{\Delta'}-(v_{\Delta'}-\lambda)=\lambda.$$

(2) 令 $f(x_i)=a_i(i\in\mathbf{N})$，$S=\{x_i\}$，并作点集

$$E_k=\left\{x\in[a,b]:x\overline{\in}S,\text{且存在无限多个 }y,\right.$$

$$\left.\text{使得}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|>\frac{1}{k}\right\},$$

即 $x\in E_k$ 当且仅当对无限多个 i，有 $|x-x_i|<k|a_i|$. 记 $J_i=(x_i-k|a_i|,x_i+k|a_i|)$，易知

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i\supset E_k,\quad \sum_{i=1}^{\infty}m(J_i)=2k\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|<+\infty$$

$\left(f\in BV([a,b])，故\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|<+\infty\right)$. 因此，其上限集为零测集：$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}J_i\right)=0$. 这说明除一零测集外，不能有无限多个 x 进入 E_k，于是 $m(E_k)=0$. 从而我们有

$$m\left(S\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\right)=0,\quad f'(x)=0\quad\left(x\overline{\in}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right).$$

例 5 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in \mathrm{Lip1}([a,b])$，则 $\bigvee_a^x(f)$ 也是属于 $\mathrm{Lip1}([a,b])$.

(2) 设 $E\subset[0,1]$，则 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界变差的充分必要条件是：E 的边界点集是有限集.

证明 略.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in BV([0,a])$，令 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,(0<x\leqslant a)$，则 $F\in BV([0,a])$.

(2) 设 $f\in BV([a,b])$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的函数 $F(x)$，使得

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant F(x'')-F(x')\quad(a\leqslant x'<x''\leqslant b).\qquad(*)$$

(3) 设 $f\in BV([a,b])$. 若有 $\bigvee_a^b(f)=f(b)-f(a)$，则 $f(x)$ 在

$[a,b]$上递增.

证明 (1) 根据 Jordan 分解，只需指出：当 $f(x)$是递增函数时，$F(x)$也递增. 为此，假定 $0<x<y\leqslant a$，我们有

$$F(y)-F(x)=\frac{1}{y}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$\geqslant\frac{(y-x)f(x)}{y}+xf(x)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=0.$$

由此即得所证.

(2) 必要性　取 $F(x)=\bigvee_a^x(f)$，则对 $a\leqslant x'<x''\leqslant b$，我们有

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant\bigvee_{x'}^{x''}(f)=F(x'')-F(x').$$

充分性　假定式(*)成立，则对$[a,b]$的任一分划 Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，我们有

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})|=F(b)-F(a).$$

由此即知 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$.

(3) 令 $F(x)=\bigvee_a^x(f)-f(x)+f(a)$，则 $F(a)=F(b)=0$. 易知 $F(x)$是递增函数，故有 $F(x)=0(a\leqslant x\leqslant b)$. 这说明 $f(x)=f(a)+\bigvee_a^x(f)$. 证毕.

例 7　试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微. 若 $f'\in R([a,b])$，则

$$\bigvee_a^b(f)=\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

(2)（更广的结果）设 $f\in R([a,b])$. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $\bigvee_a^b(F)=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$.

证明 (1) (i) 对 $x',x''\in[a,b]$且 $x'<x''$，我们有

$$|f(x'')-f(x')|=\left|\int_{x'}^{x''}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{x'}^{x''}|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

由此易知 $\bigvee_a^b(f)\leqslant\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$.

(ii) 作$[a,b]$的分划 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,则

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^n|f'(\xi_i)||x_i-x_{i-1}|.$$

注意到 $v_\Delta\leqslant\bigvee_a^b(f)$,由题设知

$$\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^n|f'(\xi_i)||x_i-x_{i-1}|\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

综合(i),(ii)即得所证.

(2) (i) 对$[a,b]$的任一分划,Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,均有

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty.$$

由此即知 $F\in\mathrm{BV}([a,b])$,且 $\bigvee_a^b(F)\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$.

(ii) (A) 先看特定的阶梯函数

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x),\quad \varepsilon_i=1\text{ 或 }0\text{ 或}-1\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

我们有

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)\mathrm{d}t\right|=\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})|\leqslant\bigvee_a^b(F).$$

(B) 对于题设中的 $f(x)$,作$[a,b]$上的阶梯函数列$\{\psi_n(x)\}$,使得 $\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=f(x)$, a. e. $x\in[a,b]$,且令

$$\varphi_n(x)=\mathrm{sgn}\{\psi_n(x)\}\quad(n\in\mathbf{N},x\in[a,b]),$$

由(A)易知 $\int_a^b\varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\bigvee_a^b(F)$. 又注意到

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)f(x)=|f(x)|,\quad \text{a. e. } x\in[a,b],$$

根据控制收敛定理可得

$$\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x \leqslant \bigvee_a^b(F).$$

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$. 若 $f(x)$有原函数，则 $f\in C([a,b])$.

(2) 设 $f:[a,b]\to[c,d]$是连续函数. 若对任意的 $y\in[c,d]$，点集 $f^{-1}(\{y\})$至多有(在$[a,b]$内)10 个点，则 $\bigvee_a^b(f)\leqslant 10(d-c)$.

(3) 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$. 若 $x_0\in[a,b]$，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$的连续点当且仅当 $x=x_0$ 是 $\bigvee_a^x(f)$的连续点.

(4) 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$. 对 $f(x)$的不连续点 $x_0\in[a,b]$，记

$$D(x_0) = |f(x_0+0) - f(x_0)| + |f(x_0-0) - f(x_0)|$$

(若 $x_0=a$ 或 b，则令 $D(x_0)=|f(x_0+0)-f(x_0)|$或$|f(x_0-0)-f(x_0)|$)，现在假定$\{x_n\}\subset[a,b]$是 $f(x)$的不连续点列，则

$$\sum_{n\geqslant 1}D(x_n) \leqslant \bigvee_a^b(f).$$

证明 (1) 反证法. 若存在 $x_0\in(a,b)$，使得$|f(x_0+0)-f(x_0-0)|=\delta_0>0$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有$|f(x_0+\varepsilon)-f(x_0-\varepsilon)|>\delta_0/2$. 从而$f(x)$在两值

$$\max\{[f(x_0-0),f(x_0+0)\}+\delta_0/3$$

与

$$\min\{f(x_0-0),f(x_0+0)\}-\delta_0/3$$

之间取不到中间值，这与 $f(x)$具有原函数矛盾.

(2) 对$[a,b]$的任一分划 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 $I_i=[x_{i-1},x_i]$，J_i 表示以 $f(x_{i-1})$，$f(x_i)$为端点的区间，则 $f(I_i)$仍是一个区间，且有

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^n \left|\int_{f(x_{i-1})}^{f(x_i)} 1\mathrm{d}y\right| = \sum_{i=1}^n\int_c^d \chi_{J_i}(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n\int_c^d \chi_{f(I_i)}(y)\mathrm{d}y = \int_c^d\sum_{i=1}^n \chi_{f(I_i)}(y)\mathrm{d}y \leqslant 10(d-c).$$

(3) (i) 因为对 $a\leqslant x_0<x\leqslant b$，有

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \bigvee_{x_0}^x(f) = \bigvee_a^x(f) - \bigvee_a^{x_0}(f).$$

所以当 $\bigvee_a^x(f)$ 在 $x=x_0$ 处连续时,$f(x)$ 也在 $x=x_0$ 处连续.

(ii) 设 $x=x_0\in[a,b)$ 是 $f(x)$ 的连续点,即对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2,\quad x\in[x_0,x_0+\delta)\subset[a,b].$$

作 $[x_0,x_0+\delta]$ 的分划 Δ: $x_0<x_1<\cdots<x_n=x_0+\delta$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\frac{\varepsilon}{2}>\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f).$$

由于 $\sum_{i=2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)$, $\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)=\bigvee_{x_0}^{x_1}(f)+\bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)$,故

$$\begin{aligned}\bigvee_{x_0}^{x_1}(f)&=\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)-\bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\quad+\frac{\varepsilon}{2}-\sum_{i=2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=|f(x_1)-f(x_0)|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

从而知 $\bigvee_{x_0}^{x}(f)\leqslant\bigvee_{x_0}^{x_1}(f)<\varepsilon(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$. 这说明 $\bigvee_a^x(f)$ 在 $x=x_0$ 处是右连续的. 同理可证 $\bigvee_a^x(f)$ 在 $x=x_0$ 处左连续.

(4) 若不连续点是有限个: $x_1,x_2,\cdots,x_m$,又设 $d>0$ 是这些点之间的最小距离,则对任给 $\varepsilon>0$,存在

$$0<a_i<d/2,\quad 0<b_i<d/2\quad(i=1,2,\cdots,m),$$
$$|f(x_i-0)-f(x_i-a_i)|<\varepsilon/2m,$$
$$|f(x_i+0)-f(x_i+b_i)|<\varepsilon/2m.$$

现在作 $[a,b]$ 之分划 Δ: $x_i,x_i-a_i,x_i+b_i(i=1,2,\cdots,m)$,则在其上 $f(x)$ 的变差 v_Δ 有估计:

$$v_\Delta\geqslant\sum_{i=1}^{m}(|f(x_i-a_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x_i+b_i)|,$$

$$|f(x_i-0)-f(x_i)|\leqslant |f(x_i-0)-f(x_i-a_i)| + |f(x_i-a_i)-f(x_i)| \leqslant \varepsilon/2m + |f(x_i-a_i)-f(x_i)|.$$

由此知 $|f(x_i-0)-f(x_i)|-\varepsilon/2m<|f(x_i-a_i)-f(x_i)|$. 类似地可推 $|f(x_i+0)-f(x_i)|-\varepsilon/2M<|f(x_i+b_i)-f(x_i)|$. 从而得

$$\begin{aligned}v_\Delta &\geqslant \sum_{i=1}^m \left\{\left(|f(x_i-0)-f(x_i)|-\frac{\varepsilon}{2m}\right)\right.\\ &\quad \left.+\left(|f(x_i+0)-f(x_i)|-\frac{\varepsilon}{2m}\right)\right\}\\ &=\sum_{i=1}^m\left\{|f(x_i-0)-f(x_i)|+|f(x_i+0)-f(x_i)|-\frac{\varepsilon}{m}\right\}\\ &=\sum_{i=1}^m D(x_i)-\varepsilon.\end{aligned}$$

因此,我们有 $v_\Delta\geqslant\sum_{i=1}^m D(x_i)$. 随之就有 $\bigvee_a^b(f)\geqslant\sum_{i=1}^m D(x_i)(m\in\mathbf{N})$. 由此易知 $\bigvee_a^b(f)\geqslant\sum_{i\geqslant1}D(x_i)$(即可列个 x_i 也成立).

注 由(4)知,若 $f\in BV([a,b])$,则点集

$$E_k=\{x\in[a,b]:\ \omega_f(x)>1/k\}$$

必为有限集. ($\omega_f(x)$表示 $f(x)$在 x 点上的振幅)

例 9 试证明下列命题:

(1) 设$\{f_k(x)\}$是$[a,b]$上的有界变差函数列,且有

$$\bigvee_a^b(f_k)\leqslant M\ (k=1,2,\cdots),\quad \lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\ x\in[a,b],$$

则 $f\in BV([a,b])$且满足 $\bigvee_a^b(f)\leqslant M$.

(2) 设 $f\in BV([a,b])$, $f_n\in BV([a,b])(n\in\mathbf{N})$. 若有

$$\lim_{n\to\infty}\bigvee_a^b(f-f_n)=0,$$

则存在$\{f_{n_k}(x)\}$,使得 $\lim_{k\to\infty}f'_{n_k}(x)=f'(x)$, a. e. $x\in[a,b]$.

(3) 设 $f_n\in BV([a,b])(n\in\mathbf{N})$. 若对任给 $\varepsilon>0$,存在 n_0,使得

$\bigvee_a^b(f_n-f_m)<\varepsilon\,(n,m\geqslant n_0)$，且$\{f_n(a)\}$是 Cauchy 列，则存在 $f\in$ BV$([a,b])$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee_a^b(f_n-f)=0$.

证明 (1) 对$[a,b]$的任一分划 Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|\ \bigvee_a^b(f_k)\leqslant M\quad(n\in\mathbf{N}).$$

令 $k\to\infty$，则由题设知

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant M\quad(n\in\mathbf{N}).$$

从而可得 $\bigvee_a^b(f)\leqslant M$，证毕.

(2) 依题设知，存在$\{f_{n_i}(x)\}$，使得$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\bigvee_a^b(f-f_{n_i})<+\infty$. 令$g_i(x)=\bigvee_a^x(f-f_{n_i})(x\in[a,b])$，易知$\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(x)$在$[a,b]$上收敛. 注意到 $g_i(x)$ $(i\in\mathbf{N})$在$[a,b]$上递增，故根据 Fubini 定理，可知

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\bigvee_a^x(f-f_{n_i})\right)\text{ a. e. 收敛.}$$

这说明

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f'(x)-f'_{n_i}(x)|<+\infty,\quad \text{a. e. } x\in[a,b],$$

即 $\lim\limits_{i\to\infty}|f'(x)-f'_{n_i}(x)|=0$，a. e. $x\in[a,b]$，证毕.

(3) (i) 令 $\bigvee_a^b(f_{n_0})=M$，由题设知对$[a,b]$的任一分划 Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$，我们有

$$\sum_{i=1}^{m}|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}|f_n(x_i)-f_{n_0}(x_i)-f_n(x_{i-1})+f_{n_0}(x_{i-1})|$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|f_{n_0}(x_i)-f_{n_0}(x_{i-1})|$$

$$\leqslant \bigvee_a^b(f_n-f_{n_0})+\bigvee_a^b(f_{n_0})<\varepsilon+M.$$

由此知 $\bigvee_a^b(f_n)<M'\ (n\in\mathbf{N},M'>0)$.

现在设 $|f_n(a)|\leqslant M''(n\in\mathbf{N},M''>0)$. 因为我们有

$$|f_n(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(a)|$$

$$\leqslant\bigvee_a^b(f_n)+M''\leqslant M'''\quad(n\in\mathbf{N},M'''>0),$$

所以根据已知结论，存在 $\{f_{n_k}(x)\}$ 以及 $f\in BV([a,b])$，使得

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

(ii) 易知对任给 $\varepsilon>0$，对任意的分划 Δ，我们有

$$\sum_{\Delta}|f_{n_k}(x_i)-f_n(x_i)-f_{n_k}(x_{i-1})+f_n(x_{i-1})|$$

$$\leqslant\bigvee_a^b(f_{n_k}-f)<\varepsilon\quad(k,n\geqslant n_0).$$

令 $k\to\infty$，则得 $(n\geqslant n_0)$

$$\sum_{\Delta}|f(x_i)-f_n(x_i)-f(x_{i-1})+f_n(x_{i-1})|<\varepsilon.$$

由此即得 $\bigvee_a^b(f-f_n)<\varepsilon$，也即 $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee_a^b(f-f_n)=0$.

例 10 试证明下列命题：

(1) 设定义在 $[0,\infty)$ 上的 $f(x)$ 满足：

$$V=\sup\left\{\bigvee_0^n(f):n=1,2,\cdots\right\}<+\infty,$$

则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(k)$ 与积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

(2) 设 $f\in BV([0,2\pi])$，则对任意的整数 n，均有 $|n\cdot\hat{f}(n)|\leqslant\bigvee_0^{2\pi}(f)$（$\hat{f}(n)$ 表示 $f(x)$ 的 Fourier 系数）.

证明 (1) (i) 对 $[0,\infty)$ 上的非负递减函数 $g(x)$，令

$$\lambda_n = \int_0^n g(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n g(k) \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由 $\lambda_{n+1}-\lambda_n=\int_n^{n+1} g(t)\mathrm{d}t-g(n+1)\geqslant 0$,可知$\{\lambda_n\}$是递增数列. 因为

$$\int_0^n g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} g(k),$$

$$\lambda_n \leqslant g(0) - g(n) \leqslant g(0),$$

所以$\{\lambda_n\}$是收敛列.

(ii) 作分解 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$,其中 $f_1(x)\geqslant 0, f_2(x)\geqslant 0$ 且都是递减函数.(记$[0,x]$上 $f(x)$的正、负变差为 $P(x),N(x)$:若$f(0)\geqslant 0$,则取 $f_1(x)=V+f(0)-N(x), f_2(x)=V-P(x)$;若$f(0)<0$,则取 $f_1(x)=V-N(x), f_2(x)=V-f(0)-P(x)$.)

令 $d_n=\int_0^n f(t)-\sum_{k=1}^n f(k)$,则有

$$d_n = \left(\int_0^n f_1(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n f_1(k)\right) - \left(\int_0^n f_2(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n f_2(k)\right).$$

以 $f_1(x), f_2(x)$视作(i)中之 $g(x)$,易知当 $n\to\infty$时上式极限存在.

若 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ 存在,则 $n\to\infty$时,$\sum_{k=1}^n f(k)=\int_0^n f(t)\mathrm{d}t-d_n$ 的极限存在.

若$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$收敛,易知 $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$,则存在 $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$,即 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ 收敛.

(2) 设 $n\neq 0$,k 是整数,则 $\int_{2k\pi/|n|}^{(k+1)2\pi/|n|} \mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x=0$. 令

$$a_k=\frac{2k\pi}{|n|} \quad (k=0,1,2,\cdots|n|),$$

$$g(x)=\sum_{k=1}^n f(a_k)\chi_{[a_{k-1},a_k)}(x) \quad (n\neq 0),$$

则 $\hat{g}(n)=0(n\neq 0)$. 从而可得

$$|\hat{f}(n)| =\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}[f(x) - g(x)]\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{|n|}\int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(a_k)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{|n|}\sum_{k=1}^{|n|}\bigvee_{a_{k-1}}^{a_k}(f) = \frac{1}{|n|}\bigvee_0^{2\pi}(f).$$

例 11 设 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|<+\infty$，则 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ 在$[-1,1]$是有界变差函数.

证明 先看对$[0,1]$的任一分划 Δ: $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，有

$$v_\Delta = \sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x_i^k - x_{i-1}^k)\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|(x_i^k - x_{i-1}^k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^k - x_{i-1}^k)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|.$$

由此知 $\bigvee_0^1(f)<+\infty$. 类似地可推 $f\in \mathrm{BV}([-1,0])$. 即得所证.

例 12 设 $f\in C^{(1)}((0,1])$，且 $f(0)=0$，试证明

$$\bigvee_0^1(f) = \sup_{0<\varepsilon<1}\left\{|f(\varepsilon)| + \int_\varepsilon^1|f'(x)|\mathrm{d}x\right\} \xlongequal{\text{记为}} M.$$

证明 依题设知，对任给 $\varepsilon>0$，$f\in \mathrm{BV}([\varepsilon,1])$，故有 $\bigvee_\varepsilon^1(f)=\int_\varepsilon^1|f'(x)|\mathrm{d}x$. 从而可得

$$M = \sup_{0<\varepsilon<1}\left\{|f(\varepsilon) - f(0)| + \bigvee_\varepsilon^1(f)\right\}$$

$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon<1}\left\{\bigvee_0^\varepsilon(f) + \bigvee_\varepsilon^1(f)\right\}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<x_1<\cdots<x_n=1}\{|f(\varepsilon) - f(0)| + |f(x_1) - f(\varepsilon)| + \cdots + |f(1) - f(x_{n-1})|\}$$

$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon<1}\left\{|f(\varepsilon)| + \int_\varepsilon^1|f'(x)|\mathrm{d}x\right\}.$$

§ 5.3 不定积分的微分

基本内容

引理 设 $f\in L([a,b])$，令 $F_h(x)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$（当 $x\overline{\in}[a,b]$ 时，令 $f(x)=0$），我们有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|F_h(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

定理 设 $f\in L([a,b])$，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

则 $F'(x)=f(x)$, a. e. $x\in[a,b]$.

推论 若 $f\in L([a,b])$，则对 $[a,b]$ 中几乎处处的点 x，都有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}t=0$$

（我们称满足上式的点 x 为 $f(x)$ 的 **Lebesgue 点**）.

典型例题精解

例 1 解答下列问题：

(1) 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x\chi_{\mathbf{Q}}(t)\mathrm{d}t\,(0\leqslant x\leqslant 1)$，试问在怎样的点 x 上，$F'(x)\neq\chi_{\mathbf{Q}}(x)$？

(2) 令 $\{r_n\}\subset(0,1)$ 是有理数列，$\{a_n\}$ 是实数列，定义

$$f_n(x)=\begin{cases}|x-r_n|^{-1/2}2^{-n}, & x\neq r_n,\\ a_n, & x=r_n\end{cases}\ (n\in\mathbf{N});\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),$$

试证明 $f\in L([0,1])$，且无论怎样给定 $\{a_n\}$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=r_n$ 上不可导.

(3) 设 $E\subset[0,1]$ 是可测集，若存在 l：$0<l<1$，使得对 $[0,1]$ 中任意的子区间 $[a,b]$，均有 $m(E\cap[a,b])\geqslant l(b-a)$，试证明 $m(E)=1$.

解 (1) 因为 $F(x)\equiv 0$，所以由 $F'(x)=0=\chi_{\mathbf{Q}}(x)$, a. e. $x\in[0,1]$，可知 $F'(x)\neq\chi_{\mathbf{Q}}(x)\,(x\in\mathbf{Q})$.

(2) 由 $f_n(x)\geqslant 0$, a. e. $x\in[0,1]$，我们有

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{r_n-1}^{r_n+1} 2^{-n}|x-r_n|^{-1/2}\mathrm{d}x = 2^{-n+2}.$$

从而知 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+2} < +\infty$，即 $f \in L([0,1])$.

此外，对任意的 $r_n, h>0$，我们有

$$\frac{F(r_n+h)-F(r_n)}{h} = \frac{1}{h}\int_{r_n}^{r_n+h} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{h}\int_{r_n}^{r_n+h} f_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{1}{2^n}h^{-1/2} \to \infty \quad (h \to 0).$$

从而知后一结论为真.

(3) 对 $x \in [0,1]$，由题设知 $\frac{1}{x-a}\int_a^x \chi_E(t)\mathrm{d}t \geqslant l$. 令 $x \to a+$，则得 $1 \geqslant l$, a. e. $x \in [0,1]$. 这说明这些几乎处处的点是 E 中点，即 $m(E)=1$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $f \in L([0,1])$，$g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调上升函数，若对任意的 $[a,b] \subset [0,1]$，有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant [g(b)-g(a)](b-a),$$

则 $f^2(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数.

(2) 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的有界可测函数，$0<\lambda<1$. 若对任意的区间 $[a,b]$，有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^p \leqslant \lambda(b-a)^{p-1}\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \quad (p>1),$$

则 $f(x)=0$, a. e. $x \in \mathbf{R}^1$.

(3) 设定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的局部可积函数 $f(x)$，$E \subset \mathbf{R}^1$ 且 $\overline{E}=\mathbf{R}^1$. 若 $f(x+t)=f(x)$ $(t \in E, x \in \mathbf{R}^1)$，则有 $f(x)=C$（常数），a. e. $x \in \mathbf{R}^1$.

证明 (1) 依题设知，对任意的 $x, x+\Delta x \in [0,1]$，均有

$$\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant [g(x+\Delta x)-g(x)]\Delta x, \quad \Delta x > 0,$$

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}, \quad \Delta x > 0.$$

令 $\Delta x \to 0$，即得 $|f(x)|^2 \leqslant g'(x)$, a. e. $x \in [0,1]$. 这说明结论成立.

(2) 进行与(1)类似的操作，我们有

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right|^p \leqslant \lambda\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|^p\mathrm{d}t \quad (\Delta x > 0).$$

再令 $\Delta x \to 0$，可知 $|f(x)|^p \leqslant \lambda|f(x)|^p$，a. e. $x\in[a,b]$. 由此即得

$$|f(x)| = 0, \quad \text{a. e. } x \in [a,b].$$

(3) (i) 若 $f\in C(\mathbf{R}^1)$，则由 $f(x)=f(0)(x\in E)$ 与 $\overline{E}=\mathbf{R}^1$ 可知 $f(x)=f(0)(x\in\mathbf{R}^1)$.

(ii) 对 $f\in L([a,b])([a,b]\subset\mathbf{R}^1)$，作函数

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \quad (h > 0, x \in \mathbf{R}^1),$$

易知 $f_h\in C(\mathbf{R}^1)$ 且 $f_h(x+s)=f_h(x)(s\in E)$. 从而由(i)知 $f_h(x)\equiv f_h(0)$(常数，$x\in\mathbf{R}^1$). 因为 $\lim\limits_{h\to 0} f_h(x)=f(x)(h\to 0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^1)$，所以

$$f(x) = f(0), \quad \text{a. e. } x \in \mathbf{R}^1.$$

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$是以 2π 与 1 为周期的可积函数，则 $f(x)=C$(常数)，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(2) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的可测函数，且 $\mathbf{R}^1$ 中一个稠密集中的数皆是 $f(x)$的周期，则 $f(x)=C$(常数)，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(3) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$. 若对任一满足 $m(G)=1$ 的开集 G，均有 $\int_G f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=0$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

证明 (1) (i) 若 $f\in C(\mathbf{R}^1)$，令 $E=\{2k\pi+i: k,i\in\mathbf{Z}\}$，则由题设知 $f(x)=f(0)(x\in E)$. 因为 $\overline{E}=\mathbf{R}^1$，所以 $f(x)\equiv f(0)$.

(ii) 对 $f\in L([a,b])([a,b]\subset\mathbf{R}^1)$，作函数$(|h|>0)$

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)\mathrm{d}t,$$

则可得

$$f_h(x+1) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t+1)\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)\mathrm{d}t = f_h(x),$$

$$f_h(x+2\pi) = f_h(x).$$

因为 $f_h(x)$是连续函数，所以由(i)知 $f_h(x)\equiv C$(常数). 注意到 $\lim\limits_{h\to 0} f_h(x)=f(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$，即可得证.

(2) 令 $g(x)=f(x)/[|f(x)|+1](x\in\mathbf{R}^1)$，则 $|g(x)|<1$ 且其周期与 $f(x)$ 相同. 考查 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$（注意：若 $T>0$ 是 $\varphi(x)$ 的周期，$\varphi\in L([0,T])$，则

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\int_0^X\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\mathrm{d}t\triangleq L_\varphi).$$

对于 $g(t)$ 的周期列 $\{T_n\}$：$T_n\to 0(n\to\infty)$，我们有

$$L_g=\frac{G(x+T_n)-G(x)}{T_n}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

令 $n\to\infty$ 可知 $L_g=G'(x)=g(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$. 由此即得所证.

(3) 由题设知，对 $a\in\mathbf{R}^1$ 有 $\int_a^{a+1}f(x)\mathrm{d}x=0$，故对于 $b>0$，可得

$$\frac{1}{b}\int_a^{a+b}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int_{a+1}^{a+1+b}f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $b\to 0$，我们有 $f(a)=f(a+1)$，a. e. $a\in\mathbf{R}^1$. 令

$$E_1=\{a\in\mathbf{R}^1:f(a)\neq f(a+1)\},\quad m(E_1)=0,$$
$$E_2=\{a\in\mathbf{R}^1:f(a)=f(a+1)\neq f(a+2)\},\quad m(E_2)=0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$E_n=\{a\in\mathbf{R}^1:f(a)=f(a+1)=\cdots=f(a+n)\neq f(a+n+1)\},\quad m(E_n)=0,$$
$$\cdots\cdots$$

且记 $S=\mathbf{R}^1\setminus\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$，则 $f(a)=f(a+1)=\cdots=f(a+n)=\cdots(a\in S)$，以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_a^{a+1/n}f(x)\mathrm{d}x\right)=f(a)\quad(a\in S\setminus\mathbf{Z},m(\mathbf{Z})=0).$$

对 $a\in S\setminus\mathbf{Z}$，令

$$G=\left(a,a+\frac{1}{n}\right)\cup\left(a+1,a+1+\frac{1}{n}\right)\cup\cdots\cup\left(a+n-1,a+n-1+\frac{1}{n}\right),$$

则 G 是开集. 且 $m(G)=1$，且有

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x=0=n\int_a^{a+1/n}f(x)\mathrm{d}x\to f(a)\quad(n\to\infty).$$

这说明对几乎处处的 $a\in\mathbf{R}^1$，有 $f(a)=0$.

例 4 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L([a,b])$，$x_0\in(a,b)$是 $f(x)$的 Lebesgue 点. $\{E_n\}$是(a,b)中可测集列，$\{\delta_n\}$是收敛于零的正数列，且 $E_n\subset[x_0-\delta_n,x_0+\delta_n]$，$m(E_n)\geqslant\alpha\delta_n(\alpha>0,n\in\mathbf{N})$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=f(x_0).$$

(2) 设 $f\in L([0,1])$. 若对任意的 $x\in(0,1)$以及 $\epsilon>0$，均存在开区间 $J_x\subset(0,1)$，使得

$$x\in J_x,\ m(J_x)<\epsilon,\quad\int_{J_x}f(t)\mathrm{d}t=0.$$

则对任意的开区间 $I\subset(0,1)$，均有 $\int_I f(t)\mathrm{d}t=0$.

证明 (1) 注意 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\delta_n}\int_{x_0-\delta_n}^{x_0+\delta_n}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0$，以及

$$\frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\alpha}\frac{1}{2\delta_n}\int_{x_0-\delta_n}^{x_0+\delta_n}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x.$$

(2) 对 $f(x)$的 Lebesgue 点 $x_0\in(0,1)$，有收敛于 0 的正数列$\{\delta_n\}$：$x_0\in J_n=[x_0-\delta_n,x_0+\delta_n]\subset(0,1)$，$\delta_n<1/n$，使得

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\delta_n}\int_{x_0-\delta_n}^{x_0+\delta_n}f(x)\mathrm{d}x=f(x_0),\quad f(x_0)=0.$$

因为$[0,1]$中点几乎处处都是 Lebesgue 点，所以 $f(x)=0$，a. e. $x\in[0,1]$. 从而 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.

§5.4 绝对连续函数与微积分基本定理

基本内容

问题 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的实值函数，问等式

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

是否成立或在什么条件下成立？

首先我们看到，如果等式成立，那么 $f(x)$一定是有界变差的连续函数，其次若

$f(x)$是$[a,b]$上的有界变差的连续函数，此时 $f'\in L([a,b])$，并令

$$h(x)=f(x)-\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

则 $h'(x)=0$ a.e. 且 $h(a)=f(a)$. 注意到前式成立的意思就是$h(x)$应该恒等于一个常数. 这就使我们回忆起 Cantor 函数 $\Phi(x)$，它是$[0,1]$上单调上升的连续函数，$\Phi'(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$，但 $\Phi(x)$并不是常数，因为 $\Phi(0)=0$，$\Phi(1)=1$. 由此可知，为使等式成立，我们还需要给 $f(x)$再加上一定的条件.

从上面的议论中我们已经看到，一个几乎处处可微且导数为零的函数并不一定等于一个常数. 为了排除这种"奇异"情况，让我们进一步分析这类函数的特征.

引理 设$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微且 $f'(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$. 若$f(x)$在$[a,b]$上不是常数函数，则必存在 $\epsilon>0$，使得对任意的 $\delta>0$，$[a,b]$内存在有限个互不相交的区间：

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),$$

其长度的总和小于 δ，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|>\epsilon$.

定义 设 $f(x)$是$[a,b]$上的实值函数. 若对任给的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\epsilon,$$

则称 $f(x)$是$[a,b]$上的**绝对连续函数**，其全体记为 AC$([a,b])$.

显然，我们有下述简单事实：

(i) 绝对连续函数一定是连续函数；

(ii) 在$[a,b]$上绝对连续函数的全体构成一个线性空间.

定理 1 若 $f\in L([a,b])$，则其不定积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数.

定理 2 若 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则 $f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数.

推理 若 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则 $f(x)$在$[a,b]$上是几乎处处可微的，且 $f'(x)$是$[a,b]$上的可积函数.

定理 3 若 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，且 $f'(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$，则 $f(x)$在$[a,b]$上等于一个常数.

定理 4(微积分基本定理) 若 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

注 1 综合上述,可小结如下:"一个定义在$[a,b]$上的函数$f(x)$具有形式

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\quad g(t)\in L([a,b])$$

的充分且必要条件为:$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数.此时我们有$g(x)=f'(x)$, a.e. $x\in[a,b]$."

注 2 绝对连续函数是几乎处处可微的这个结论一般是不能改进的.

典型例题精解

例 1 判别下列函数在给定区间上的绝对连续性:

(1) $f(x)=|x|$, $[-1,1]$; (2) $f(x)=\sqrt{x}$, $[0,1]$;

(3) $f(x)=x^p\sin(1/x^q)$, $[0,1]$, $f(0)=0$;

(4) Cantor 函数 $C(x)$, $[0,1]$.

解 (1) $f(x)=|x|$在$[-1,1]$上绝对连续.

(2) 注意到$\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\int_0^x t^{-1/2}\mathrm{d}t$,故$f\in AC([0,1])$.

(3) $0<q<p$时,$f\in AC([0,1])$(注意,当$0<p\leqslant q$时,$f\notin BV([0,1])$).

(4) 假定$C(x)$是$[0,1]$上的绝对连续函数,则因$C'(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$,所以$C(x)=\int_0^x C'(t)\mathrm{d}t=0$.这导致矛盾,故 Cantor 函数不是绝对连续函数.

例 2 解答下列问题:

(1) 试作一个在$[0,1]$上无处单调的绝对连续函数.

(2) 设$E\subset[0,1]$且$m(E)>0$,试作$f\in AC([0,1])$,且$f(x)$严格递增,使得$f'(x)=0(x\in E)$.

(3) 试问一致连续的函数是绝对连续的吗?

(4) 试问两个绝对连续的函数之复合函数是绝对连续函数吗?

(5) 试问绝对函数列在一致收敛的运算下是封闭的吗?

解 (1) 在$[0,1]$中作点集E,使得$[0,1]$中任一区间I都有(见§2.4 例 1)

$$m(I\cap E)>0,\quad m(I\cap E^c)>0,$$

并作$[0,1]$上的绝对连续函数

$$f(x) = \int_0^x [\chi_E(t) - \chi_{E^c}(t)]\mathrm{d}t.$$

因此，对$[0,1]$中任一区间I，存在$x_1 \in I \cap E, x_2 \in I \cap E^c$，使得

$$f'(x_1) = \chi_E(x_1) - \chi_{E^c}(x_1) = 1 > 0;$$

$$f'(x_2) = \chi_E(x_2) - \chi_{E^c}(x_2) = -1 < 0.$$

这说明$f(x)$在区间I上不是单调函数，即得所证.

(2) 设$H \subset [0,1]$是类 Cantor 集：$m(H) > 0$且$m(H^c) > 0$. 令$E = H^c$，我们作函数$f(x) = \int_0^x \chi_H(t)\mathrm{d}t\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$，即为所求.

(3) 否. 例如$f(x) = x^2\sin(1/x^2)\,(0 < x \leqslant 1)$，$f(0) = 0$. 我们对$[0,1]$作分划$\Delta$:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n\pi + \pi/2}} < \frac{1}{\sqrt{n\pi}} < \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi + \pi/2}} < \cdots$$

$$< \frac{1}{\sqrt{1 + \pi/2}} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} < 1,$$

则可得$v_\Delta = |\sin 1 - 2/\pi| + \sum_{k=0}^{n} 1/(k\pi + \pi/2) + 1/(n\pi + \pi/2)$. 从而易知$\bigvee_0^1(f) = +\infty$.

(4) 不一定. 例如$f(y) = y^{1/3}, y \in [-1,1]$，以及

$$g(x) = \begin{cases} x^3\cos^3(\pi/x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

易知$f(y)$是$[-1,1]$上的绝对连续函数，$g(x)$是$[0,1]$的绝对连续函数. 然而，我们有

$$F(x) = f[g(x)] = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \bigvee_0^1(F) = +\infty.$$

(5) 令$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ x\sin\dfrac{\pi}{x}, & \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1, \end{cases}$ $f_n \in \mathrm{AC}([0,1])\,(n \in \mathbf{N})$，易知$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x\sin\dfrac{\pi}{x}, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ 而$f(x)$在

[0,1]上不是有界变差的.

例 3 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in AC([0,1])$,则存在 $f_i\in AC([0,1])(i=1,2)$且递增,使得 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

(2) 假设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的单调上升函数,则 f 可分解为:$f(x)=g(x)+h(x)\ (x\in[a,b])$,其中,$g(x)$是单调上升的并且绝对连续的函数,$h(x)$是单调上升函数而且 $h'(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$.

(3) 设 $f\in AC([a,b])$,则 $f^+,f^-\in AC([a,b])$.

(4) 存在 $f\in C([0,1])\setminus AC([0,1])$,而 $f\in AC([0,a])(0<a<1)$.

证明 (1) 不妨假定 $f(0)=0$(否则看 $g(x)=f(x)-f(0)$). 令 $f_1(x)=\int_0^x|f'(t)|dt,f_2(x)=f_1(x)-f(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$,即可得证.

(2) 令 $g(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt,h(x)=f(x)-g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则 $g(x)$是递增的,且 $h'(x)=0$,a.e. $x\in[a,b]$. 下证 $h(x)$的递增性. 为此,令 $a\leqslant y<x\leqslant b$,且作函数

$$f^*(t)=\begin{cases}f(t), & a\leqslant t<x,\\ f(x), & x\leqslant t,\end{cases}$$

则对 $\delta>0$,我们有

$$\int_y^x\frac{f^*(t+\delta)-f^*(t)}{\delta}dt>\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}f^*(t)dt-\frac{1}{\delta}\int_y^{y+\delta}f^*(t)dt$$

$$=f(x)-\frac{1}{\delta}\int_y^{y+\delta}f^*(t)dt\leqslant f(x)-f(y).$$

应用 Fatou 引理,可知

$$\int_y^x f'(t)dt=\int_y^x\lim_{\delta\to 0+}\frac{f^*(t+\delta)-f^*(t)}{\delta}dt\leqslant f(x)-f(y).$$

这说明 $g(x)-g(y)\leqslant f(x)-f(y)$,即 $h(y)\leqslant h(x)$.

(3) 证略.

(4) $f(x)=(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)(0\leqslant x<1),f(0)=0$.

例 4 试证明下列命题:

(1) 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|, \quad x,y \in [a,b],$$

则 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

(2) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的非负绝对连续函数,则 $f^p(x)$ $(p>1)$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

(3) 设 $f\in \mathrm{BV}([0,1])$. 若对任给 $\varepsilon>0$, $f(x)$在$[\varepsilon,1]$上绝对连续,且 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,则 $f(x)$在$[0,1]$上绝对连续.

证明 (1) 这是因为

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(y_i)| \leqslant M\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i| < \delta M,$$

所以对于任意的 $\varepsilon>0$,只需取 $\delta<\varepsilon/M$ 立即可知结论成立.

(2) 假定$|f(x)|\leqslant M(a\leqslant x\leqslant b)$. 因为我们有($\xi>\eta>0$)

$$\xi^p-\eta^p=p[\eta+\theta(\xi-\eta)]^{p-1}(\xi-\eta), \quad 0<\theta<1,$$

所以对 $x,y\in[a,b]$,得到

$$|f^p(y)-f^p(x)| \leqslant p(2M)^{p-1}|f(y)-f(x)|.$$

由此即可得证.

注 设 $f(x)$在$[0,1]$上是绝对连续函数,但$|f(x)|^p(0<p<1)$在$[0,1]$上可以不是绝对连续函数. 例如 $f(x)=x^2\sin(1/x)(x\neq 0)$, $f(0)=0$,则 $f\in \mathrm{AC}([0,1])$(注意$|f'(x)|\leqslant 3$),但$[f(x)]^{1/2}$在$[0,1]$上甚至不是有界变差函数.

(3) 对递减收敛于 0 的正数列$\{\varepsilon_n\}$以及 $x\in(0,1]$,可知

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon_n}^x f'(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}[f(x)-f(\varepsilon_n)]=f(x)-f(0).$$

这说明 $f'\in L([0,1])$,故结论成立.

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数, $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上满足 Lipschitz 条件. 则 $f[g(x)]$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

(2) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续严格递增函数, $g(y)$在$[f(a),f(b)]$上绝对连续,则 $g[f(x)]$在$[a,b]$上绝对连续.

(3) 设 $f(x)$在$[a,b]$上定义,若对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当$[a,b]$中有限个互不相交的区间$[x_i,y_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 时,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[f(y_i)-f(x_i)]\right|<\varepsilon,$$

试证明 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续.

证明 (1) 依题设知存在 $M>0$,使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y| \quad (x,y\in\mathbf{R}^1).$$

对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当$[a,b]$中互不相交区间组满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 时,有$\sum_{i=1}^{n}|g(y_i)-g(x_i)|<\varepsilon$. 从而可得

$$\sum_{i=1}^{n}|f[g(y_i)]-f[g(x_i)]|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|g(y_i)-g(x_i)|<M\varepsilon.$$

由此结论得证.

(2) 由 $g\in AC([f(a),f(b)])$可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,当互不相交区间组$\{[c_i,d_i]\}_1^n$ 满足$\{[c_i,d_i]\}_1^n\subset[f(a),f(b)]$且$\sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i)<\delta_1$ 时,有$\sum_{i=1}^{n}|g(d_i)-g(c_i)|<\varepsilon$. 因为 $f\in AC([a,b])$,所以存在 $\delta>0$,当$[a,b]$中互不相交区间组$\{[x_i,y_i]\}_1^n$ 满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\delta_1.$$

注意到 $f(x)$的严格递增性,易知区间组$\{[f(x_i),f(y_i)]\}_1^n$ 也是互不相交的. 从而当$[a,b]$中互不相交区间组满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 时,可得

$$\sum_{i=1}^{n}|g[f(y_i)]-g[f(x_i)]|<\varepsilon.$$

(3) 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$ 以及$[a,b]$中互不相交区间组$\{x_i,y_i\}_1^n$ 满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 时,我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|\\&\quad=\sum{}'[f(y_i)-f(x_i)]+\sum{}''[f(x_i)-f(y_i)]\end{aligned}$$

$$= \left|\sum{}'[f(y_i)-f(x_i)]\right| + \left|\sum{}''[f(x_i)-f(y_i)]\right|$$

$$= \left|\sum{}'[f(y_i)-f(x_i)]\right| + \left|\sum{}''[f(y_i)-f(x_i)]\right| < 2\varepsilon,$$

其中$\sum'$表示对满足 $f(y_i)\geqslant f(x_i)$的那些子区间$[x_i,y_i]$求和，$\sum''$表示对满足 $f(y_i)<f(x_i)$的那些子区间$[x_i,y_i]$求和.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in BV([a,b])$，则 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续当且仅当函数 $\bigvee_a^x(f)$在$[a,b]$上绝对连续.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上递增，且有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a),$$

则 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续.

(3) 设 $f\in BV([a,b])$. 若有 $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x = \bigvee_a^b(f)$，则 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续.

证明 (1) 充分性 假定 $\bigvee_a^x(f)\in AC([a,b])$，注意到不等式

$$\sum_{i=1}^n|f(y_i)-f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^n\bigvee_{x_i}^{y_i}(f),$$

立即可知 $f\in AC([a,b])$.

必要性 假定 $f\in AC([a,b])$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对$[a,b]$中互不相交区间组$\{(x_i,y_i)\}_1^n$：$\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)<\delta$，有$\sum_{i=1}^n|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$. 对每个 i，作分划

$$\Delta_i:\ x_i = a_{i,0} < a_{i,1} < a_{i,2} < \cdots < a_{i,m_i} = y_i,$$

由$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{m_i}[a_{i,j}-a_{i,j-1}]=\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)<\delta$ 可知

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{m_i}|f(a_{i,j})-f(a_{i,j-1})| < \varepsilon.$$

从而对一切分划 Δ_i，取其上确界，可得

$$\sum_{i=1}^{n}\bigvee_{x_i}^{y_i}(f)\leqslant\varepsilon,\quad 即\quad \bigvee_{a}^{x}(f)\in \mathrm{AC}([a,b]).$$

(2) 考查函数 $F(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t-[f(x)-f(a)]$，易知$F(a)=F(b)=0$. 又因当 $a\leqslant x<y\leqslant b$ 时，有

$$F(y)-F(x)=\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t-[f(y)-f(x)]\leqslant 0,$$

所以 $F(t)$是递减函数. 从而知 $F(x)\equiv 0$，这说明

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t-[f(x)-f(a)]=0,\quad f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

即得所证.

(3) 只需指出函数 $\bigvee_{a}^{x}(f)$是绝对连续的即可. 令

$$F(x)=\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t-\bigvee_{a}^{x}(f),$$

易知 $F(x)$是$[a,b]$上的递减函数. 由 $F(a)=F(b)=0$ 可知，$F(x)\equiv 0$. 即

$$0\equiv\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t-\bigvee_{a}^{x}(f),\quad \bigvee_{a}^{x}(f)\equiv\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

故结论成立.

例 7 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in\mathrm{AC}([a,b])$，$g\in\mathrm{AC}([a,b])$，则 $\bigvee_{a}^{x}(fg)\in\mathrm{AC}([a,b])$.

(2) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的连续的下凸函数，则 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续.

证明 (1) 依题设知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当$[a,b]$中互不相交区间组$\{(x_i,y_i)\}_1^n$ 满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\bigvee_{x_i}^{y_i}(f)<\varepsilon,\quad \sum_{i=1}^{n}\bigvee_{x_i}^{y_i}(g)<\varepsilon.$$

假定$|f(x)|\leqslant M_1$，$|g(x)|\leqslant M_2(a\leqslant x\leqslant b)$，我们有

$$\bigvee_{x_i}^{y_i}(fg)\leqslant M_1\bigvee_{x_i}^{y_i}(g)+M_2\bigvee_{x_i}^{y_i}(f)\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

从而知

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\bigvee_a^{y_i}(fg)-\bigvee_a^{x_i}(fg)\right|=\sum_{i=1}^{n}\bigvee_{x_i}^{y_i}(fg)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_1\bigvee_{x_i}^{y_i}(g)+\sum_{i=1}^{n}M_2\bigvee_{x_i}^{y_i}(f)=M_1\varepsilon+M_2\varepsilon.$$

由此即得所证.

(2) 对任给 $\varepsilon>0$,取 $\eta>0$,使得 $4\eta<b-a$,且有

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(a<x<a+2\eta),$$

$$|f(x)-f(b)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(b-2\eta<x<b),$$

以及 $f(x)$在$[a,a+2\eta]$与$[b-2\eta,b]$上单调. 又有 $M>0$,使得

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|x-y|\quad(a+\eta\leqslant x\leqslant b-\eta).$$

令 $\delta=\min\{\eta,\varepsilon/3M\}$,且设互不相交区间组$\{(x_i,y_i)\}_1^n$:

$$\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,y_i)\subset[a,b],\quad\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta,$$

这里假定 $y_i\leqslant x_{i+1}$,且对某个 $1\leqslant p<q\leqslant n$,有

$$x_p<a+\eta\leqslant x_{p+1}<y_{q-1}\leqslant b-\eta<y_q$$

(如有必要,可再增加两个区间). 从而知

$$a<y_p=(y_p-x_p)+x_p<\delta+a+\eta\leqslant a+2\eta,$$

且由单调性得到

$$\sum_{i=1}^{p}|f(y_i)-f(x_i)|=\left|\sum_{i=1}^{p}[f(y_i)-f(x_i)]\right|$$

$$\leqslant|f(y_q)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

类似地有 $b>x_q=y_q-(y_q-x_q)>b-\eta-\delta\geqslant b-2\eta$,以及

$$\sum_{i=q}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|\leqslant|f(b)-f(x_q)|<\varepsilon/3.$$

从而我们知道

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\frac{2\varepsilon}{3}+\sum_{i=p+1}^{q-1}|f(y_i)-f(x_i)|$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + M\sum_{i=p+1}^{q-1}|y_i - x_i| < \frac{2\varepsilon}{3} + M\delta \leqslant \varepsilon.$$

由此即得所证.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$，$f_n\in \mathrm{AC}([a,b])$ $(n\in \mathbf{N})$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_a^b(f_n-f)=0$，则 $f\in \mathrm{AC}([a,b])$.

(2) 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上递增的绝对连续函数列. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上收敛，则其和函数在$[a,b]$上绝对连续.

(3) 设 $g_k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的绝对连续函数. 若

(i) 存在 c，$a\leqslant c\leqslant b$，使得级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k(c)$ 收敛；

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_a^b|g_k'(x)|\mathrm{d}x<\infty$，

则级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k(x)$在$[a,b]$上是收敛的，设其极限函数为 $g(x)$，$g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，且有

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}g_k'(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

证明 (1) 由题设知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 n_0，使得 $\bigvee\limits_a^b(f_n-f)<\varepsilon$ $(n\geqslant n_0)$. 由此知存在 $\delta>0$，当$[a,b]$中互不相交区间组$\{(x_i,y_i)\}_1^n$ 满足$\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-x_i)<\delta$ 时，有$\sum\limits_{i=1}^{m}|f_{n_0}(y_i)-f_{n_0}(x_i)|<\varepsilon$，以及

$$\sum_{i=1}^{m}|[f(y_i) - f_{n_0}(y_i)] - [f(x_i) - f_{n_0}(x_i)]| \leqslant \bigvee_a^b(f - f_{n_0}) < \varepsilon.$$

从而可得

$$\sum_{i=1}^{m}|f(y_i) - f(x_i)|$$

$$= \sum_{i=1}^{m}|f(y_i) - f(x_i) - [f_{n_0}(y_i) - f_{n_0}(x_i)]$$

$$+ [f_{n_0}(y_i) - f_{n_0}(x_i)]|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} |[f(y_i) - f_{n_0}(y_i)] - [f(x_i) - f_{n_0}(x_i)]|$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} |f_{n_0}(y_i) - f_{n_0}(x_i)| < 2\varepsilon.$$

由此即得所证.

(2) 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $S(x)$ 是递增函数. 由 Fubini 定理可知 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$，a. e. $x\in[a,b]$，注意到 $f_n'(x)\geqslant 0$，a. e. $x\in[a,b]$，我们有

$$\int_a^b S'(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[f_n(b) - f_n(a)] = S(b) - S(a).$$

这说明 $S\in \mathrm{AC}([a,b])$（见例 6 之(2)）.

(3) 由条件(ii)可知（见 § 4.3 定理 2 的推论）函数

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x), \quad x\in[a,b]$$

是$[a,b]$上的可积函数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^x \sum_{k=1}^{n} g_k'(t)\mathrm{d}t = \int_c^x G(t)\mathrm{d}t.$$

因为每个 $g_k(x)$ 都是绝对连续函数，所以有

$$g_k(x) = \int_c^x g_k'(t)\mathrm{d}t + g_k(c), \quad x\in[a,b].$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x) = \int_c^x \sum_{k=1}^{n} g_k'(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} g_k(c), \quad n=1,2,\cdots.$$

现在令 $n\to\infty$，即得

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = \int_c^x G(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(c), \quad x\in[a,b].$$

若令上式左端为 $g(x)$，则有

$$g(x) = \int_c^x G(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(c).$$

由此可知 $g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，且有

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

例 9 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上，若存在常数 M，使对$[a,b]$的任一分划 Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|f(x_{i+1}) - f(x_i)|^p}{(x_{i+1} - x_i)^{p-1}} \leqslant M \quad (p > 1),$$

称 $f \in A^p([a,b])$. 若 $f \in A^p([a,b])$，则 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续.

(2) 假设 $f(x,y)$是定义在$[a,b]\times[c,d]$上的二元函数，且存在 $y_0 \in (c,d)$，使得 $f(x,y_0)$ 在$[a,b]$上是可积的；又对于每一个 $x \in [a,b]$，$f(x,y)$是对 y 在$[c,d]$上的绝对连续函数，$f_y'(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上是可积的，则函数 $F(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 是定义在$[c,d]$上的绝对连续函数，且对几乎处处的 $y \in [c,d]$，有

$$F'(y) = \int_a^b f_y'(x,y)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 注意不等式

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(b_i) - f(a_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|f(b_i) - f(a_i)|}{(b_i - a_i)^{(p-1)/p}} (b_i - a_i)^{(p-1)/p}$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|f(b_i) - f(a_i)|^p}{(b_i - a_i)^{p-1}} \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (b_i - a_i) \right\}^{(p-1)/p}.$$

(2) 由题设知($y \in [c,d]$)

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \int_{y_0}^{y} f_t'(x,t)\mathrm{d}t.$$

故有(对 x 在$[a,b]$上积分)

$$F(y) - F(y_0) = \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}t \int_a^b f_t'(x,t)\mathrm{d}x.$$

注 1 强可导与绝对连续

设函数 $f(x)$定义在(a,b)上，$x_0 \in (a,b)$，若存在极限

$$\lim_{\substack{x'\to x_0\\ x''\to x_0}} \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \triangleq f'(x_0),$$

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处**强可导**，$f'(x_0)$称为 $f(x)$在 $x=x_0$ 点处的**强导数**. 我们有**结论**：

若 $f(x)$在(c,d)上强可导，则 $f(x)$在$[a,b]$、$[a,b]\subset(c,d)$上绝对连续.

注 2 绝对连续函数与 Lipschitz 条件的同型描述

(i) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上，则 $f(x)$在$[a,b]$上是绝对连续的充分必要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使得对$[a,b]$中任意有限个互不相交的区间$[c_i,d_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(c_i)-f(d_i)|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|d_i-c_i|+\varepsilon.$$

(ii) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上，则 $f\in \mathrm{Lip1}([a,b])$的充分必要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使得对$[a,b]$中任意有限个区间组：

$$[c_1,d_1],\ [c_2,d_2],\ \cdots,\ [c_n,d_n],$$

都有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(d_i)-f(c_i)|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|d_i-c_i|+\varepsilon.$$

(上述结论的证明详见周民强编《实变函数论》(北京大学出版社，2001)284—287)

例 10 试证明下列命题：

(1) 若 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续，且$|f'(x)|\leqslant M$, a. e. $x\in[a,b]$，则

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|x-y|.$$

(2) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上. 若有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|,\quad x,y\in[a,b],$$

则$|f'(x)|\leqslant M$, a. e. $x\in[a,b]$.

(3) 若 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续，则

$$弧长\ l(f)=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的可微函数，且 $f(x)$与 $f'(x)$都是 $\mathbf{R}^1$ 上的可积函数. 则 $\int_{\mathbf{R}^1}f'(x)\mathrm{d}x=0$.

证明 (1) 对 $x,y\in[a,b]$，我们有

$$|f(y)-f(x)|=\left|\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_x^y|f'(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant M|y-x|.$$

(2) 由题设知 $f\in \mathrm{AC}([a,b])$，故 $f(x)$几乎处处可微. 因为

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|, \quad \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leqslant M\ (x,y\in[a,b]),$$

所以令 $y\to x$，可得 $|f'(x)|\leqslant M$, a. e. $x\in[a,b]$.

(3) 由 § 5.2 例 3(2)可知，只需指出

$$l(f)\leqslant\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

为此，对任给 $\varepsilon>0$，作 $[a,b]$ 的分划 Δ，使得 $[a,b]$ 上曲线 $y=f(x)$ 对应于 Δ 的折线长 $l_\Delta(f)\geqslant l(f)-\varepsilon$，又作 $g\in C([a,b])$，使得

$$\int_a^b|f'(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

现在令 $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，易知 $|l_\Delta(f)-l_\Delta(G)|<\varepsilon$. 注意到

$$|\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1+\beta^2}|\leqslant|\alpha-\beta|,$$

$$\left|\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x-\int_a^b\sqrt{1+[g(x)]^2}\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|f'(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

由此可知

$$l_\Delta(f)<l_\Delta(G)+\varepsilon\leqslant\int_a^b\sqrt{1+[G'(x)]^2}\mathrm{d}x+\varepsilon$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+[g(x)]^2}\mathrm{d}x+\varepsilon\leqslant\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}+2\varepsilon.$$

注意到 $l_\Delta(f)>l(f)-\varepsilon$，最后导出

$$l(f)\leqslant\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}+3\varepsilon.$$

即得所证.

(4) 由题设知，存在

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}\int_A^B f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}[f(B)-f(A)].$$

令 $\lim\limits_{B\to+\infty}f(B)=l_1$，$\lim\limits_{A\to-\infty}f(A)=l_2$，则由 $f(x)$ 的可积性得到 $l_1=0=l_2$. 这说明 $\int_{\mathbf{R}^1}f'(x)\mathrm{d}x=0$.

例 11 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in AC([0,1])$，且 $f(1)-f(0)=1$，则 $\int_0^1[f'(x)]^2dx\geqslant 1$.

(2) 设 $f(x)$在任一区间$[a,b]\subset \mathbf{R}^1$ 上都绝对连续，则对每个 $y\in \mathbf{R}^1$，有

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x+y)dx=\int_a^b\frac{d}{dy}f(x+y)dx.$$

(3) 设 $f(x)$在$[0,1]$上绝对连续，$f(0)=0$，则

$$\int_0^1|f(x)f'(x)|dx\leqslant\int_0^1|f'(x)|^2dx.$$

(4) 设 $f\in AC([0,a])$，且 $f(0)=0$，则($l>0$)

$$\int_0^a|f(x)|^l f'(x)|dx\leqslant\frac{a^l}{l+1}\int_0^a|f'(x)|^{l+1}dx.$$

证明 (1) $1=f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)dx\leqslant\left(\int_0^1[f'(x)]^2dx\right)^{1/2}$.

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\int_a^b f(x+y)dx&=\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+y+h)-f(x+y)}{h}dx\\&=\lim_{h\to 0}\int_a^b\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f'(t+y)dt\right)dx=\int_a^b f'(x+y)dx.\end{aligned}$$

$\left(\text{注意令 } f_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt\text{，则 }\lim_{h\to 0}\int_a^b|f_h(x)-f(x)|dx=0.\right)$

(3) 因为$|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)dt\right|\leqslant\int_0^x|f'(t)|dt$，所以有

$$|f(x)f'(x)|\leqslant\int_0^x|f'(t)|dt\cdot|f'(x)|\leqslant|f'(x)|\cdot\int_0^1|f'(t)|dt,$$

$$\int_0^1|f(x)f'(x)|dx\leqslant\left(\int_0^1|f'(x)|dx\right)^2\leqslant\int_0^1|f'(x)|^2dx.$$

(4) 令 $F(x)=\int_0^x|f(t)|^l|f'(t)|dt-\frac{1}{l+1}\left(\int_0^x|f'(t)|dt\right)^{l+1}$，则

$$F'(x)=|f(x)|^l|f'(x)|-\left(\int_0^x|f'(t)|dt\right)^l|f'(x)|.$$

注意到$|f(x)|^l=\left|\int_0^x f'(t)dt\right|^l\leqslant\left(\int_0^x|f'(t)|dt\right)^l$，可知 $F'(x)\leqslant 0$. 故得 $0<\xi<x$，$F(x)-F(0)=F'(\xi)x\leqslant 0$. 从而 $F(x)\leqslant 0$，我们有

$$\int_0^a|f(x)|^l|f'(x)|dx\leqslant\frac{1}{l+1}\left(\int_0^a|f'(x)|dx\right)^{l+1}$$

$$\leqslant \frac{a^l}{l+1}\int_0^a |f'(x)|^{l+1}\mathrm{d}x.$$

(这里用到 Hölder 不等式，见第六章)

例 12 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in AC([a,b])$，试证明 $\bigvee_a^b(f)=\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(x)$在$[0,1]$上有原函数，$g(x)$是$[0,1]$上的绝对连续函数，则 $f(x)\cdot g(x)$在$[0,1]$上有原函数.

证明 (1) (i) 对$[a,b]$的任一分划 Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，有

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

从而知 $\bigvee_a^b(f)\leqslant\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t$.

(ii) 由题设知 $f\in BV([a,b])$，且 $|f'(x)|=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)$，a.e. $x\in[a,b]$. 注意到函数 $\bigvee_a^x(f)$在$[a,b]$上递增，我们有

$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)\right]\mathrm{d}x\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

注：也可见 §5.2 例 3 之(1)以及 §5.4 例 6 之(1).

(2) 设 $F'(x)=f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，记 $h(x)=F(x)g(x)-\int_a^x F(t)g'(t)\mathrm{d}t$，则对 $0\leqslant x<y\leqslant 1$，有

$$\frac{h(y)-h(x)}{y-x}=\frac{F(y)-F(x)}{y-x}g(y)-\int_x^y\frac{F(t)-F(x)}{t-x}\cdot\frac{t-x}{y-x}g'(t)\mathrm{d}t.$$

由此即得 $h'(x)=f(x)g(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

例 13 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset[0,1]$是可测集，则存在 $f_n\in AC([0,1])$ $(n\in\mathbf{N})$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(t)-\chi_E(t)|\mathrm{d}t=0. \qquad (*)$$

(2) 设$\{g_k(x)\}$是在$[a,b]$上的绝对连续函数列，又有 $|g_k'(x)|\leqslant F(x)$ a.e. $(k=1,2,\cdots)$且 $F\in L([a,b])$. 若 $\lim_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)$ $(a\leqslant x$

$\leqslant b$), $\lim\limits_{k\to\infty} g_k'(x)=f(x)$, a. e. $x\in[a,b]$,则

$$g'(x)=f(x),\quad \text{a. e. } x\in[a,b].$$

(3) 设$\{f_n(x)\}$是支集含于(a,b)的连续可微函数列,且满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0=\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n'(x)-F(x)|\mathrm{d}x,$$

则 $F(x)=f'(x)$, a. e. $x\in[a,b]$,其中 $f,F\in L([a,b])$.

证明 (1) 令 $f_n(x)=n\int_x^{x+1/n}\chi_E(t)\mathrm{d}t$,则 $0\leqslant f_n(x)\leqslant 1$ 且 $f_n\in AC([0,1])$ $(n\in\mathbf{N})$,以及 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\chi_E(x)$,a. e. $x\in[0,1]$,从而根据有界收敛定理,可得式(*)成立.

(2) 由题设知 $\int_a^x g_k'(t)\mathrm{d}t=g_k(x)-g_k(a)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$,故根据控制收敛定理可得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{k\to\infty}\int_a^x g_k'(t)\mathrm{d}t=g(x)-g(a).$$

因此 $f(x)=g'(x)$,a. e. $x\in[a,b]$.

(3) 对支集含于(a,b)的任一连续可微函数 $\varphi(x)$,有

$$\int_a^b f_n(x)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f_n'(x)\cdot\left(\int_x^b\varphi(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

从而知(令 $n\to\infty$)

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b F(x)\left(\int_x^b\varphi(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\int_a^x F(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

由此易得 $f(x)=\int_a^x F(t)\mathrm{d}t$,a. e. $x\in[a,b]$. 证毕.

例 14 试证明下列命题:

(1) 设有定义在$[0,1]$上的 $f(x)$,定义在$[0,1]\times[0,1]$上的 $g(x,y)$ 满足 $f(y)-f(x)\leqslant g(x,y)(y-x)$ $(0<x,y<1)$,以及

$$g(u,v)\leqslant g(x,y)\quad (u\leqslant x,\ v\leqslant y),$$

则存在 $\lim\limits_{y\to x} g(x,y)=\varphi(x)$,a. e. $x\in[0,1]$,以及

$$f(y)-f(x)=\int_x^y\varphi(t)\mathrm{d}t\quad (0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1).$$

(2) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$，令 $\Delta_n(x)=2^n\left(f\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-f(x)\right)$，$x\in\mathbf{R}^1$. 若存在 $M>0$，使得 $\|\Delta_n\|_\infty\leqslant M$ ($n=1,2,\cdots$，见第六章)，且 $\Delta_n(x)\to 0$ ($n\to\infty$，$x\in\mathbf{R}^1$)，则 $f(x)=C$，$x\in\mathbf{R}^1$.

证明 (1) 令 $\varphi(x)=g(x,x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，则 $\varphi(x)$ 是递增函数，且有

$$\begin{cases}\varphi(x)\leqslant g(y,x)\leqslant\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant g(x,y)\leqslant\varphi(y), & x<y,\\ \varphi(y)\leqslant g(x,y)\leqslant\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant g(y,x)\leqslant\varphi(x), & y<x.\end{cases}\qquad (*)$$

从而知 $\{x\in[0,1]:\lim\limits_{y\to x}g(x,y)\neq\varphi(x)\}\subset\{x\in[a,b]:\lim\limits_{y\to x}\varphi(y)\neq\varphi(x)\}$. 易知上式右端点集是可数集，由式(*)知 $f\in AC([0,1])$ (Lip1)，且 $f'(x)=\varphi(x)$ (x 是 $\varphi(x)$ 的连续点时). 从而我们有

$$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t=\int_x^y\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 对任一区间 (a,b)，存在二进子区间列 $\{[a_n,b_n)\}$：$a_n=p_n2^{-q_n}$，$b_n=(p_n+1)2^{-q_n}$ $(p_n,q_n\in\mathbf{N})$，使得 $[a,b)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$. 易知存在 n_0，记 $a_*=\inf\limits_{n\leqslant n_0}\{a_n\}$，$b^*=\sup\limits_{n\leqslant n_0}\{b_n\}$，使得

$$|f(a)-f(a_*)|+|f(b)-f(b^*)|<b-a,$$

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&\leqslant|f(b)-f(b^*)|+\sum_{n=1}^{n_0}|f(b_n)-f(a_n)|\\&\quad+|f(a^*)-f(a)|\\&<(b-a)+\sum_{n=1}^{n_0}2^{-q_n}\cdot M\\&<(M+1)(b-a).\end{aligned}$$

由此可知 $f\in\mathrm{Lip}^1(\mathbf{R}^1)$，随之 $f\in AC(\mathbf{R}^1)$. 我们有

$$f(x+2^{-n})-f(x)=\int_x^{x+2^{-n}}f'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_x^{x+2^{-n}}f'(t)\mathrm{d}t/2^{-n}=0.$$

即 $f'(x)=0$, a.e. $x\in\mathbf{R}^1$. 从而可得 $f(0)=f(k2^{-n})(k\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N})$. 根据 $\{k2^{-n}: k\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N}\}$ 在 $\mathbf{R}^1$ 中的稠密性以及 $f(x)$ 的连续性,说明 $f(x)\equiv f(0)$.

例 15 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数,则对任给 $\varepsilon>0,\delta>0$,存在 $G\in AC([a,b])$ 以及 $E\subset[a,b]$: $m(E)<\delta$,使得

$$\sup_{x\in[a,b]\setminus E}\{|f(x)-G(x)|\}<\varepsilon.$$

(2) 设 $f\in AC([a,b])$,则 $f^+(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}f^+(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}f'(x), & f(x)>0,\\ 0, & f(x)\leqslant 0,\end{cases}\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

证明 (1) 由题设知,存在 $g\in C([a,b])$ 以及闭集 $F\subset[a,b]$: $m([a,b]\setminus F)<\delta$,使得 $f(x)=g(x)(x\in F)$. 随之又存在多项式 $P(x)$,使得 $|g(x)-P(x)|<\varepsilon/2(a\leqslant x\leqslant b)$. 由此可得 $|f(x)-P(x)|=|g(x)-P(x)|<\varepsilon/2(x\in F)$. 从而令 $E=[a,b]\setminus F,G(x)=P(x)$,即得 $\sup\limits_{x\in[a,b]\setminus E}\{f(x)-G(x)\}<\varepsilon$.

(2) 注意 $f^+(x)=[f(x)+|f(x)|]/2$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续. 对于 $f(x_0)>0$,则存在邻域 $U(x_0,\delta)$,使得

$$f(x)>0\ (x\in U(x_0,\delta)),\quad f^+(x)=f(x)\ (x\in U(x_0,\delta).$$

对 $f(x_0)<0$,也有类似结果.

现在看 $f(x_0)=0$: 若 $f(x),|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处均可导,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f^+(x_0)}{\mathrm{d}x}&=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|f(x_0)|}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+|f(x_0+h)|}{h}.\end{aligned}\tag{*}$$

此时,如果存在 $\{h_n\}$: $f(x_0+h_n)<0$,那么 $\frac{\mathrm{d}f^+(x_0)}{\mathrm{d}x}=0$;如果对一切 h,均有 $f(x_0+h)>0$,那么 $(*)=\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)/h=0$;如果 $f(x_0+h)\equiv0$,那么当然有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^+(x_0)=0$.

例 16 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上,则 $f\in \mathrm{Lip}1([0,1])$ 的充分必要条件是: 存在 $g\in L^\infty([0,1])$(见第六章),使得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t. \tag{*}$$

(2) $f\in \mathrm{Lip}1([0,1])$当且仅当存在 $f_n\in C^{(1)}([0,1])$ $(n=1,2,\cdots)$，使得

(i) $|f_n'(x)|\leqslant M$ $(x\in[0,1],n=1,2,\cdots)$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in[0,1]$.

证明 (1) 必要性　假定 $f\in \mathrm{Lip}1([0,1])$，则 $f\in \mathrm{AC}([0,1])$且有

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|\quad (x,y\in[0,1]).$$

由此即知$|f'(x)|\leqslant M$，a. e. $x\in[0,1]$，并令 $g(x)=f'(x)$即可.

充分性　假定(*)式成立且$|g(t)|\leqslant M$，a. e. $x\in[0,1]$，则对任意的 $x,y\in[0,1]$，我们有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant\left|\int_x^y|g(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant M|y-x|.$$

(2) 必要性　假定 $f\in \mathrm{Lip}1([0,1])$，则由(1)知

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad |f'(t)|\leqslant M,\quad \text{a. e. } t\in[0,1].$$

故存在 $g_n\in C([0,1])(n\in\mathbf{N})$：$|g_n(t)|\leqslant M(0\leqslant t\leqslant 1)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|g_n(t)-f'(t)|\mathrm{d}t=0,\quad \lim_{k\to\infty}g_{n_k}(t)=f'(t),\quad \text{a. e. } t\in[0,1].$$

从而令 $f_k(x)=f(0)+\int_0^x g_{n_k}(t)\mathrm{d}t$，我们有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(0)+\lim_{k\to\infty}\int_0^x g_{n_k}(t)\mathrm{d}t=f(0)+\int_0^x\lim_{k\to\infty}g_{n_k}(t)\mathrm{d}t$$

$$=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x),$$

以及

$$f_k'(x)=g_{n_k}(x)\ (0\leqslant x\leqslant 1),\quad |f_k'(x)|\leqslant M\ (k\in\mathbf{N}).$$

充分性　假定存在 $f_n\in C^{(1)}([0,1])(n\in\mathbf{N})$使得(i)，(ii)成立，我们有

$$|f(x)-f(y)| = \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_n(y)|$$
$$= \lim_{n\to\infty}|f_n'(\xi_n)||x-y| \leqslant M|x-y|$$
$$(0\leqslant x<y\leqslant 1, x<\xi_n<y).$$

例 17 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$，$g\in L(\mathbf{R}^1)$. 若有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbf{R}^1}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|\mathrm{d}x = 0,$$

则存在 $a,\lambda\in\mathbf{R}^1$，使得 $f(a+t)=\int_a^{a+t}g(x)\mathrm{d}x+\lambda$，a. e. $t\in\mathbf{R}^1$，从而 $f'(x)=g(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(2) 设 $G_n\subset[0,1]\triangleq I\,(n\in\mathbf{N})$ 是开集，且满足

$$G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_n\supset\cdots,\quad m(G_n)\leqslant 1/2^n,$$

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}m(G_n\cap[0,x])\,(x\in I)$，则

(i) $f\in AC(I)$.

(ii) $f\in \mathrm{Lip}1(I)$ 的充分必要条件是：存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使得 $G_{n_0}=\varnothing$.

证明 (1) 易知 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=f(x)$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$，故存在 $a\in\mathbf{R}^1$，$\lambda\in\mathbf{R}^1$，使得 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(t)\mathrm{d}t=\lambda$. 从而得

$$f(a+t)-\int_a^{a+t}g(x)\mathrm{d}t-\lambda$$
$$= f(a+t)-\lambda-\lim_{h\to 0}\int_a^{a+t}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x$$
$$+\lim_{h\to 0}\int_a^{a+t}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right]\mathrm{d}x$$
$$= f(a+t)-\lambda-\lim_{h\to 0}\int_a^{a+t}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x$$
$$= f(a+t)-\lambda-\lim_{h\to 0}\left[\int_a^{a+t}\frac{f(x+h)}{h}\mathrm{d}x-\int_a^{a+t}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x\right]$$
$$= f(a+t)-\lambda-\lim_{h\to 0}\left[\int_{a+h}^{a+h+t}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x-\int_a^{a+t}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x\right]$$

$$= f(a+t) - \lambda - \lim_{h\to 0}\left[\int_{a+t}^{a+t+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x - \int_{a}^{a+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x\right]$$

$$= f(a+t) - \lambda - [f(a+t) - \lambda] = 0.$$

(2) (i) 对任给 $\varepsilon>0$,取 N 使得 $\sum_{N+1}^{\infty}1/2^n<\varepsilon/2$. 又记 $\delta=\varepsilon/2N$,则对 $[0,1]$中互不相交的开区间列$\{(a_i,b_i)\}$: $\sum_{i\geqslant 1}(b_i-a_i)<\delta$,我们有

$$\sum_{i\geqslant 1}|f(b_i) - f(a_i)| = \sum_{i\geqslant 1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}m(G_n\cap[a_i,b_i])\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i\geqslant 1}m(G_n\cap[a_i,b_i])\right)$$

$$\leqslant \sum_{N+1}^{\infty}m(G_n) + \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i\geqslant 1}m(G_n\cap[a_i,b_i])\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + N\sum_{i\geqslant 1}(b_i-a_i) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这说明 $f\in \mathrm{AC}(I)$.

(ii) **充分性** 假定存在 $n_0\in\mathbf{N}$,使得 $G_{n_0}=\varnothing$,则对$[0,1]$中两点 $x''>x'$,可得

$$|f(x'') - f(x')| = \sum_{n=1}^{n_0-1}m(G_n\cap[x',x'']) \leqslant n_0|x''-x'|.$$

必要性 反证法. 假定对任意的 N,存在 n_N: $n_N>N$,使得 $G_{n_N}\neq\varnothing$,则自然有 $G_N\neq\varnothing$. 我们取 $\delta>0$,使得$(x-\delta,x+\delta)\subset G_N$. 又取 a,b: $a<b$,使得

$$a,b\in(x-\delta,x+\delta)\subset G_N = \bigcap_{i=1}^{N}G_i.$$

从而有

$$|f(b) - f(a)| = \sum_{n=1}^{\infty}m(G_n\cap[a,b])$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{N}m(G_n\cap[a,b])$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(b-a) = N(b-a).$$

这说明 $f\overline{\in}\mathrm{Lip1}(I)$,矛盾.

§5.5 分部积分公式与积分中值公式

基本内容

定理 1(分部积分公式) 设 $f(x),g(x)$ 皆为$[a,b]$上的可积函数，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^1$，令

$$F(x)=\alpha+\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad G(x)=\beta+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)F(x)\mathrm{d}x=F(b)G(b)-F(a)G(a).$$

注 注意到绝对连续函数与不定积分的关系，上述定理可改述如下：

设 $f(x),g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

定理 2(积分第一中值公式) 若 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，$g(x)$是$[a,b]$上非负可积函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3(积分第二中值公式) 若 $f\in L([a,b])$，$g(x)$是$[a,b]$上的单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L([a,b])$，令 $g(x)=f(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$I=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

(2) 设 $f\in L([0,1])$，且有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，则

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{6}.$$

(3) 设 $f\in L([a,b])$且有

$$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

则 $f(x)=0$, a. e. $x\in[a,b]$.

(4) 设 $f\in L^1([0,1])$，且有

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2} \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

则 $f(x)=x$, a. e. $x\in[0,1]$.

证明 (1) 记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，我们有 $F(a)=0$，以及

$$I = \int_a^b f(t)F(t)\mathrm{d}t = F^2(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

由此知 $2I=F^2(b)$，即得所证.

(2) 令 $F(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$，则 $F(1)=1$，且有 $(0\leqslant x\leqslant 1)$

$$\int_0^x f(y)\left(\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y = \int_0^x f(y)F(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}F^2(x),$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x)\left\{\int_0^x f(y)\left(\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\cdot\frac{1}{2}F^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}F(x) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}F^3(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}F(1) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(3) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，因为 $F(b)=0$, $F(a)=0$，且有

$$\begin{aligned} \int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x &= x^n F(x)\Big|_a^b - n\int_a^b x^{n-1}F(x)\mathrm{d}x \\ &= -n\int_a^b x^{n-1}F(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1,2,\cdots), \end{aligned}$$

所以我们得到

$$\int_a^b x^n F(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n = 0,1,\cdots.$$

现在，根据多项式一致逼近连续函数的定理，可知对任意的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得 $|F(x)-P(x)|<\varepsilon(x\in[a,b])$. 注意到

$$\int_a^b P(x)F(x)\mathrm{d}x = 0,$$

我们有

$$\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)[F(x) - P(x)]\mathrm{d}x.$$

从而可知

$$\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\int_a^b |F(x)|\mathrm{d}x.$$

由 ε 之任意性可得 $F(x)\equiv 0$，随之又得 $f(x)=0$, a. e. $x\in[a,b]$.

(4) 注意到$\dfrac{1}{n+2}=\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x$，则由题设知($n=0,1,2,\cdots$)

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n[f(x)-x]\mathrm{d}x=0.$$

从而根据(3)，即得 $f(x)-x=0$, a. e. $x\in[0,1]$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L([0,\infty))$，则

$$I=\int_0^x\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}t=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u \quad (0\leqslant x<+\infty).$$

(2) 设 $f(x)$是$(0,\infty)$上非负递减函数，且对$(0,\infty)$中任一区间$[a,b]$，均有 $f\in \mathrm{AC}([a,b])$，则

$$I = p\int_0^{+\infty}[f(x)]^p x^{p-1}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^p.$$

(3) 设 $f\in L((0,b))$，且令 $g(x)=\int_x^b f(t)/t\mathrm{d}t\,(0<x\leqslant b)$，则

(i) $\lim\limits_{x\to 0+} xg(x)=0$; (ii) $g\in L((0,b))$; (iii) $\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明 (1) 令 $F(t)=\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\,(0\leqslant t<+\infty)$，则

$$\begin{aligned} I &= tF(t)\Big|_0^x - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u \\ &= x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

(2) 由题设知$[xf(x)]^{p-1}\leqslant\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}$ $(0<x<+\infty)$，故有

$$I \leqslant p\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}\cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p$$

$$=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p\Big|_0^{+\infty}=\left(\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)^p.$$

(3) (i) 由题设知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $\int_0^\delta|f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon$. 从而对 $x\in(0,\delta)$，有 $\int_x^\delta\frac{x}{t}|f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon$. 此外，显然有 $(0<x<\delta)$

$$\int_\delta^b\frac{x}{t}|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{x}{\delta}\int_0^b|f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

因此，$|xg(x)|\leqslant\int_x^b\frac{x}{t}|f(t)|\mathrm{d}t<2\varepsilon$. 这说明结论成立.

(ii),(iii) 任取 a：$0<a<b$，我们有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_x^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=x\cdot\int_x^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=a\cdot g(a)+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $a\to0+$，则 $g\in L((0,b))$，且有

$$\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=0+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $g\in L(\mathbf{R}^1)$，则存在 C，使得对 $C^{(2)}(\mathbf{R}^1)$ 中满足 $f(x)=0$ $(x\overline{\in}(a,b))$的任意 $f(x)$，均有

$$\left|\int_{\mathbf{R}^1}g(x)f^2(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant C\int_{\mathbf{R}^1}[f^2(x)+(f'(x))^2]\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集且 $m(E)<+\infty$，$g(x)$在 E 上有界可测，又记 $a=\inf\{g(x):x\in E\}$，$b=\sup\{g(x):x\in E\}$，$h\in\mathrm{AC}([a,b])$. 若令 $f(x)=h[g(x)](x\in E)$，则 $f\in L(E)$，且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=h(b)\cdot m(E)-\int_a^b h'(t)\cdot m(g^{-1}([a,t]))\mathrm{d}t.$$

(3) 设 $f(x)$，$g(x)$是$[0,\infty)$上的可测函数，且有

$$f\in L([0,\infty)),\quad |xg(x)|\leqslant M,\quad 1\leqslant x<\infty,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)g(t)\mathrm{d}t=0.$$

证明 (1) 令 $G(x)=\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t$,我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^1} g(x)f^2(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}G(x) \\ &= G(x)f^2(x)\Big|_a^b - 2\int_a^b G(x)f(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= -2\int_a^b G(x)f(x)f'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $2|f(x)f'(x)|\leqslant f^2(x)+[f'(x)]^2$,以及

$$|G(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{x}|g(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\mathrm{d}t\triangleq C,$$

所以得到

$$\left|\int_{\mathbf{R}^1} g(x)f^2(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant C\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}[f^2(x)+(f'(x))^2]\mathrm{d}x.$$

(2) 显然 $f\in L(E)$,我们作函数

$$G(t,x)=h'(t)\chi_{g^{-1}([a,t])}(x)\quad((t,x)\in[a,b]\times E),$$

因为 $\iint\limits_{[a,b]\times E}|G(t,x)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|h'(t)\mathrm{d}t\cdot m(E)<+\infty$,所以 $G\in L([a,b]\times E)$. 根据 Fubini 定理交换次序,可知

$$\begin{aligned}I &= \int_E \mathrm{d}x\int_a^b G(t,x)\mathrm{d}t = \int_a^b\mathrm{d}t\int_E G(t,x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b h'(t)\left(\int_E\chi_{g^{-1}([a,t])}(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_a^b h'(t)\cdot m(g^{-1}([a,t]))\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \int_E\mathrm{d}x\int_{g(x)}^b h'(t)\mathrm{d}t = \int_E(h(b)-h[g(x)])\mathrm{d}x \\ &= h(b)m(E)-\int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

综合上式,即得所证.

(3) 令 $F(x)=\int_0^x|f(u)|\mathrm{d}u$,我们有$(t>1)$

$$\begin{aligned}\left|\int_1^t f(u)g(u)\mathrm{d}u\right| &\leqslant \int_1^t M\frac{|f(u)|}{u}\mathrm{d}u \\ &= M\frac{F(u)}{u}\Big|_1^t + M\int_1^t\frac{F(u)}{u^2}\mathrm{d}u\quad\left(F(x)\leqslant\int_0^{+\infty}|f(u)|\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant M\left(\frac{F(t)}{t}-F(1)\right)+M\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\cdot\left(1-\frac{1}{t}\right)$$

$$\leqslant M\left\{\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x/t-F(1)\right\}+M\cdot\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\left(1-\frac{1}{t}\right)$$

$$=M\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x-MF(1)=o(t)\quad(t\to+\infty).$$

§ 5.6 $\mathbf{R}^1$ 上的积分换元公式

基本内容

问题 设 $f\in L([c,d])$，且 $g:[a,b]\to[c,d]$ 是几乎处处可微的函数，公式

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t,\quad[\alpha,\beta]\subset[a,b]$$

是否成立？

我们注意到，当 $f(x)\equiv1$ 时，公式化为

$$g(\beta)-g(\alpha)=\int_\alpha^\beta g'(t)\mathrm{d}t.$$

由此可见，要使公式成立，还需添加其他的条件. 从 Riemann 积分的换元公式的学习中，我们知道这类问题与复合函数的微分有关. 在这里，情况也类似，只是更复杂一些. 在此之前，我们先要介绍几个关于可微点集与映像集的测度之间关系的结论.

引理 1 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，$E\subset[a,b]$ 且 $m(E)=0$，则 $m(f(E))=0$.

推论 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，E 是 $[a,b]$ 中的可测集，则 $f(E)$ 是可测集.

引理 2 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，$E\subset[a,b]$. 若 $f'(x)$ 在 E 上存在且 $|f'(x)|\leqslant M$，则

$$m^*(f(E))\leqslant M\cdot m^*(E).$$

推论 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数，$E\subset[a,b]$ 是可测集且 $f(x)$ 在 E 上可微，则

$$m^*(f(E))\leqslant\int_E|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

定理 1 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，在 $[a,b]$ 的子集 E 上是可微的. 我们有

(i) 若 $f'(x)=0$, a.e. $x\in E$, 则 $m(f(E))=0$;

(ii) 若 $m(f(E))=0$,则 $f'(x)=0$, a.e. $x\in E$.

定理 2(复合函数的微分) 设 $g:[a,b]\to[c,d]$是几乎处处可微的函数,$F(x)$是$[c,d]$上的几乎处处可微的函数且$F'(x)=f(x)$ a.e., $F(g(t))$在$[a,b]$上是几乎处处可微的.若对于$[c,d]$中的任一零测集 Z,总有 $m(F(Z))=0$,则

$$[F(g(t))]' = f[g(t)]g'(t), \quad \text{a.e.}\, x \in [a,b].$$

推论 设 $g(t)$以及 $f(g(t))$在$[a,b]$上几乎处处可微,其中 $f(x)$在$[c,d]$上绝对连续,$g([a,b])\subset[c,d]$,则

$$[f(g(t))]' = f'(g(t))g'(t), \quad \text{a.e.}\, t \in [a,b].$$

定理 3(换元积分法) 假设 $g(x)$在$[a,b]$上是几乎处处可微的,$f(x)$是$[c,d]$上的可积函数,且 $g([a,b])\subset[c,d]$. 记 $F(x)=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$, 则下述两个命题是等价的:

(i) $F(g(t))$是$[a,b]$上的绝对连续函数;

(ii) $f(g(t))g'(t)$是$[a,b]$上的可积函数且有

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t, \quad \alpha,\beta \in [a,b]. \qquad (*)$$

推论 设 $g:[a,b]\to[c,d]$是绝对连续函数,$f\in L[c,d]$,则下述条件之一都是(*)成立的充分条件:

(i) $g(t)$在$[a,b]$上是单调函数;

(ii) $f(x)$在$[c,d]$上是有界函数;

(iii) $f(g(t))g'(t)$在$[a,b]$上是可积函数.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$在$[a,b]$上是处处可微的,且 $f'(x)$是$[a,b]$上的可积函数,则 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$.

(2) 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的连续函数,除一可数集外,$f'(x)$存在,且 $f'(x)$是$[a,b]$上的可积函数,则

$$f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

(3) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微. 若 $f'(x)=0$,a.e. $x\in[a,b]$,则 $f(x)$在$[a,b]$上是一个常数(函数).

(4) 设 $f\in C([a,b])$. 若$|f(x)|$在$[a,b]$上绝对连续,则 $f(x)$在

$[a,b]$上也绝对连续.

证明 (1) 因为 $f'\in L([a,b])$,所以对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $e\subset[a,b]$且 $m(e)<\delta$ 时,有

$$\int_e |f'(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

从而对于其长度总和小于 δ 的任意的互不相交区间组 (x_1,y_1), $(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$,可知

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i)-f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^n m(f([x_i,y_i]))$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{[x_i,y_i]} |f'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\bigcup\limits_{i=1}^n [x_i,y_i]} |f'(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这说明 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数,故结论成立.

(2) 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$\int_e |f'(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon \quad (e\subset[a,b],m(e)<\delta).$$

令 $E=\{t_j\}$是 $f(x)$在其上不可导的点集,自然有 $m(f(E))=0$. 现在对 $[a,b]$中互不相交区间组$\{(x_i,y_i)\}_1^n$,它满足$\sum\limits_{i=1}^n(y_i-x_i)\leqslant\delta$,我们有

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i)-f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^n m(f([x_i,y_i]))$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n m(f([x_i,y_i]\setminus E)) + \sum_{i=1}^n m(f(E))$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} |f'(x)|\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n 0 = \int_{\bigcup\limits_{i=1}^n (x_i,y_i)} |f'(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这说明 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数,故结论成立.

(3) 由题设知 $f'\in L([a,b])$,故 $f\in AC([a,b])$. 因为 $f'(x)=0$, a. e. $x\in[a,b]$,所以 $f(x)\equiv C$(常数).

(4) (i) 若 $E\subset[a,b]$: $m(E)=0$,则由 $|f|\in AC([a,b])$可知, $m(|f|(E))=0$. 从而易得 $m(f(E))=0$.

(ii) 依题设知$|f(x)|$在$[a,b]$上几乎处处可微. 故在 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$ 的点 x_0 处,自然有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|f(x_0)|=f'(x_0)$;而对 $f(x_0)=0$ 的点

x_0,若存在$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|f(x_0)|$,则 $f'(x_0)=0$.

(iii) 设 $Z\subset[a,b]$是$|f(x)|$在其上不可微的点集,则 $m(Z)=0$. 由(i),(ii)知 $f'(x)(x\overline{\in}Z)$存在且 $f'\in L([a,b])$,故对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $e\subset[a,b]$: $m(e)<\delta$ 时,有 $\int_e|f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 现在对$[a,b]$中满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ 的互不相交区间组$\{(x_i,y_i)\}_1^n$,我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}m(f([x_i,y_i]))\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}m(f([x_i,y_i]\setminus Z)+\sum_{i=1}^{n}m(f(Z))\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{y_i}|f'(x)|\mathrm{d}x+0=\int_{\bigcup_{i=1}^{n}(x_i,y_i)}|f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续.

例 2 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的单调上升函数,令 $E=\{x\in[a,b]$: $f'(x)$存在$\}$,则 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=m^*(f(E))$.

(2) 设 $f\in \mathrm{Lip}1(\mathbf{R}^1)$,则对任意可测集 $E\subset\mathbf{R}^1$,均有 $m(f(E))\leqslant M\cdot m(E)$(其中$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$, $x,y\in\mathbf{R}^1$).

(3) 设定义在 $\mathbf{R}^1$ 的 $f(x)$满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \mathrm{e}^{|x|+|y|}\cdot|x-y| \quad (x,y\in\mathbf{R}^1).$$

若 $E\subset\mathbf{R}^1$: $m(E)=0$,则 $m(f(E))=0$.

证明 (1) 只需指出 $\int_E f'(x)\mathrm{d}x\leqslant m^*(f(E))$,对覆盖 $f(E)$的区间 $I_n(n\geqslant1)$,则 E 被区间 $J_n=f^{-1}(I_n)(n\geqslant1)$覆盖. 在每个 J_n 中取递减数列$\{\alpha_k^{(n)}\}$,递增数列$\{\beta_k^{(n)}\}$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k^{(n)}=\inf\limits_{x\in J_n}\{x\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}=\sup\limits_{x\in J_n}\{x\}$,我们有

$$\int_{J_n}f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{\alpha_k^{(n)}}^{\beta_k^{(n)}}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant m(I_n).$$

从而可得

$$\int_E f'(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\bigcup_{n\geqslant 1} J_n} f'(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\int_{J_n} f'(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n\geqslant 1} m(I_n).$$

根据外测度定义即知结论成立.

(2) 由题设知 $f\in \mathrm{AC}(\mathbf{R}^1)$,故知存在 $Z\subset \mathbf{R}^1$: $m(Z)=0$,而 $m(f(Z))=0$ 且存在 $f'(x)(x\in E\setminus Z)$. 从而我们有

$$\begin{aligned} m(f(E)) &\leqslant m(f(E\setminus Z)) + m(f(Z)) \\ &= m(f(E\setminus Z)) \leqslant \int_{E\setminus Z} |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E M\mathrm{d}x = M\cdot m(E). \end{aligned}$$

(3) 不妨假定 E 是有界集: $E\subset(-r,r)$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在开集 G: $E\subset G\subset(-r,r)$,$m(G\setminus E)<\varepsilon$. 令 $G=\bigcup_{i\geqslant 1}(a_i,b_i)$,则 $f((a_i,b_i))\subset(f(a_i),\mathrm{e}^{2r}|b_i-a_i|)$,且有

$$m(f(G)) \leqslant \bigcup_{i\geqslant 1} C\mathrm{e}^{2r}|b_i-a_i| < C\mathrm{e}^{2r}\varepsilon,$$

由此知 $m(f(E))=0$.

例 3 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界变差且连续的函数. 若对$[a,b]$中任一零测集 Z,有 $m(f(Z))=0$(简称为 f 具有零测性,或称 f 具有性质 N),则 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

(2) 设 $f\in\mathrm{AC}([c,d])$,$g\in\mathrm{AC}([a,b])$且 $g([a,b])=[c,d]$. 若 $f[g(x)]$在$[a,b]$上有界变差,则 $f[g(x)]$在$[a,b]$上绝对连续.

(3) 设 $f(x)$是$[a,b]$上严格递增的连续函数,$E=\{x\in[a,b], f'(x)=\infty\}$,则 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续的充分必要条件是: $m(f(E))=0$.

证明 (1) 依题设知存在 $E\subset[a,b]$: $m(E)=0$,使得 $f'(x)$存在$(x\in[a,b]\setminus E)$. 由题设又知 $m(f(E))=0$,故对$(x,y)\subset[a,b]$,我们有

$$\begin{aligned} |f(y)-f(x)| &\leqslant m(f([x,y])) \\ &\leqslant m^*(f([x,y]\setminus E)) + m(f(E)) \leqslant \int_x^y |f'(t)|\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

由此不难推出 $f\in\mathrm{AC}([a,b])$.

(2) 对任一$[a,b]$中的零测集 E,由题设知 $m(g(E))=0$. 从而 $m(f[g(E)])=0$. 注意到 $f[g(x)]$是$[a,b]$上的有界变差函数,故结论

成立(参见(1)).

(3) **必要性** 假定 $f\in \mathrm{AC}([a,b])$,而由题设知 $m(E)=0$,故 $m(f(E))=0$.

充分性 假定 $m(f(E))=0$. 由题设知 $m(E)=0$,而注意到 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$,故由(1)即知 $f\in \mathrm{AC}([a,b])$.

注 1 $[a,b]$上的可微函数 $f(x)$具有零测性. 实际上,假定 $E\subset[a,b]$: $m(E)=0$,则令 $E_n=\{x\in E: |f'(x)|<n\}(n\in \mathbf{N})$,就有 $m(E_n)=0(n\in\mathbf{N})$. 注意到 $f(E)=\bigcup\limits_{n\geq 1} f(E_n)$即可得证.

注 2 设 $f\in C([a,b])$,则 $f(x)$具有零测性的充分必要条件是: 对$[a,b]$中任一可测集 E,$f(E)$是可测集.

证明 必要性 假定 $E\subset[a,b]$是可测集,则存在分解: $E=\left(\bigcup\limits_{n\geq 1}F_n\right)\cup \mathbf{Z}$: 每个 F_n 都是紧集,$m(\mathbf{Z})=0$. 因为每个 $f(F_n)$都是紧集(可测集),所以由 $f(E)=\left(\bigcup\limits_{n\geq 1}f(F_n)\right)\cup f(\mathbf{Z})$以及 $m(f(\mathbf{Z}))=0$ 可知,$f(E)$是可测集.

注 3 (i) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上,且具有零测性,则 $f^2(x)$也具有零测性.

(ii) 设 $f(x)$是$[a,b]$的非负函数且具有零测性,则$\sqrt{f(x)}$也具有零测性.

证明 (i) 对$[a,b]$中满足 $m(E)=0$ 的可测集 E,有 $m(f(E))=0$. 注意到 $g(x)=x^2$ 是绝对连续函数,所以 $m(g[f(E)])=0$,即 $f^2(x)$具有零测性.

(ii) 注意 $g(x)=\sqrt{x}$ 是绝对连续函数.

例 4 (1) 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$,且令 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$,则对任意的 $b>0$,均有 $F\in\mathrm{AC}([-b,b])$,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ 以及 $\bigvee\limits_{-\infty}^{+\infty}(F)<+\infty$.

(2) 若 $F\in\mathrm{AC}([-b,b])$(任意的 $b>0$),且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\bigvee\limits_{-\infty}^{+\infty}(F)<+\infty$,则存在 $f\in L(\mathbf{R}^1)$,使得 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

证明 (1) 易知 $F\in\mathrm{AC}([-b,b])$,且有 $\bigvee\limits_{-\infty}^{+\infty}(F)=\int_{\mathbf{R}^1}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$. 因为 $\bigvee\limits_{-\infty}^{x}(F)=\int_{\mathbf{R}^1}\chi_{(-\infty,x)}(t)\cdot|f(t)|\mathrm{d}t$,所以得到

$$\lim_{x\to-\infty}\bigvee_{-\infty}^{x}(F)=\int_{\mathbf{R}^1}\lim_{x\to-\infty}\chi_{(-\infty,x)}(t)|f(t)|\mathrm{d}t=0.$$

由此即得 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$.

(2) 由题设知 $F(x)=F(-b)+\int_{-b}^{x}F'(t)\mathrm{d}t(x>-b)$. 注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F'(t)|\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}|F'(t)|\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\bigvee_{-n}^{n}(F) \leqslant \bigvee_{-\infty}^{+\infty}(F) < +\infty,$$

可知 $F'\in L(\mathbf{R}^1)$. 从而根据控制收敛定理,我们有 $f(t)\triangleq F'(t)$,

$$F(x) = \lim_{b\to+\infty}F(-B) + \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{x}F'(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$且 $f'(x)>0(x\in\mathbf{R}^1)$,则对 $\mathbf{R}^1$ 中可测集 E, $f^{-1}(E)$必为可测集.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微,且 $f'(x)>0$,则反函数 $f^{-1}(x)$在$[f(a),f(b)]$上绝对连续.

(3) 设 $f\in \mathrm{AC}([a,b])$且是严格递增函数,若有 $f([a,b])=[c,d]$,则对$[a,b]$中的 Borel 集 E,必得

$$\int_{f^{-1}(E)}f'(x)\mathrm{d}x = m(E).$$

证明 (1) 注意,依题设知 $f^{-1}(x)$是连续可微且严格递增的函数,故可立即得出结论成立.

(2) 易知 $f^{-1}(x)$在$[f(a),f(b)]$上严格递增且可微,故$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(-1)}(x)$在$[f(a),f(b)]$上可积. 从而结论得证.

(3) 对任一区间$[p,q]\subset[c,d]$,记 $r=f^{-1}(p)$,$s=f^{-1}(q)$,则

$$\int_{f^{-1}([p,q])}f'(x)\mathrm{d}x = f(s)-f(r) = q-p = m([p,q]).$$

根据 $f'\in L([a,b])$,立即可知结论成立.

注 设 $f(x)$是严格递增且连续的函数,令 $E=\{x: f'(x)=0\}$,则 $f^{-1}(x)$是绝对连续函数当且仅当 $m(E)=0$.

例 6 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L([0,1])$且在 $x=0$ 处连续,令 $f_n(x)=f(x^n)(n\in\mathbf{N}$, $0<x<1)$,则 $f_n\in L([0,1])(n\in\mathbf{N})$.

(2) 设 $g(x)$定义在$[a,b]$上，且 $g([a,b])\subset[c,d]$，又 $f(x)$定义在$[c,d]$上. 若 $f'(x)$，$g'(x)$各在$[c,d]$与$[a,b]$上几乎处处存在，且有 $e\subset[a,b]$：$m(e)=0$，使得 $g'(x)\neq 0(x\overline{\in}e)$，则 $f[g(x)]$在$[a,b]$上几乎处处可微，且有

$$(f[g(x)])' = f'[g(x)]g'(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

(3) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上非负实值可测函数，$\varphi(x)$在$[0,\infty)$上递增，且在任一区间$[0,a](a>0)$上绝对连续，又 $\varphi(0)=0$，令 $G_t=\{x\in\mathbf{R}^1: f(x)>t\}$，$t>0$. 则对 $\mathbf{R}^1$ 中任一可测集 E，有

$$I = \int_E \varphi[f(x)]\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} m(E\cap G_t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

证明 (1) 应用变量替换 $t=x^n$，我们有

$$\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(x^n)|\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(t)|t^{\frac{1}{n}-1}/n\mathrm{d}t$$

$$= \left\{\int_0^a + \int_a^1\right\}|f(t)|n^{-1}t^{1/n-1}\mathrm{d}t$$

$$= I_1 + I_2 \quad (\text{选 } 0<a<1 \text{ 后定}).$$

因为 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，又可取 a 使得 $f(x)$在$[0,a]$上有界，且 $1-1/n<1$，所以 I_1 存在；在$[a,1]$上，由于被积函数小于等于$a^{1/n-1}|f(t)|/n$，故 I_2 存在.

(2) 证略.

(3) 由 $\varphi(x)$的绝对连续性可知

$$I = \int_{\mathbf{R}^1}\chi_E(x)\left(\int_0^{f(x)}\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbf{R}^1}\chi_E(x)\int_0^{+\infty}\chi_{[0,f(x)]}(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

注意到 $\chi_{[0,f(x)]}(t)$是 $\mathbf{R}^1\times[0,\infty)$中集合$\{(x,t): f(x)>t\}$上的特征函数，从而我们有

$$I = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^1}\chi_E(x)\chi_{[0,f(x)]}(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbf{R}^1}\chi_E(x)\chi_{G_t}(x)\varphi'(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} m(E\cap G_t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

例 7 设 $f\in R([c,d])$，$g(x)$在$[a,b]$上连续且严格单调，$R(g)=[c,d]$. 若 $g^{-1}(y)$在$[c=g(a),d=g(b)]$上绝对连续，试证明 $f(g)\in R([a,b])$.

证明 设 $E\subset[c,d]$是 $f(x)$的不连续点集，自然有 $m(E)=0$. 令 $\widetilde{E}=g^{-1}(E)$，则由题设知 $m(\widetilde{E})=0$. 从而又知 $f[g(x)]$在$[a,b]\setminus\widetilde{E}$ 上连续，即 $f(g)\in R([a,b])$.

注 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集，$T: E\to\mathbf{R}^n$ 是满足下述条件的变换：

(1) 存在 $T(E)\to E$ 的变换 T^{-1}；

(2) T 与 T^{-1}均变可测集为可测集；

(3) $m(T(E))<+\infty$，

则存在 $g\in L(E)$. 对 $f\in L(T(E))$，均有 $f(T(\cdot))\in L(E)$，且有

$$\int_{T(E)} f(x)\mathrm{d}x=\int_E f[T(y)]g(y)\mathrm{d}y.$$

第六章 L^p 空 间

§6.1 L^p 空间的定义与不等式

定义 1 (i) 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数,记

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \quad 0<p<\infty.$$

我们用 $L^p(E)$表示使$\|f\|_p<\infty$的 f 的全体,称其为 L^p **空间**. ($L^1(E)$就是第四章所说的 $L(E)$.)

(ii) 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数,$m(E)>0$. 若存在 M,使得$|f(x)|\leqslant M$, a. e. $x\in E$,则称 $f(x)$在 E 上**本性有界**,M 称为 $f(x)$的**本性上界**. 再对一切本性上界取下确界,记为$\|f\|_\infty$,称它为 $f(x)$在 E 上的**本性上确界**. 此时用 $L^\infty(E)$表示在 E 上本性有界的函数之全体.

注 若 $0<m(E)<+\infty$,则 $\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

定理 1 若 $f,g\in L^p(E)$,$0<p\leqslant\infty$,α,β 是实数,则 $\alpha f+\beta g\in L^p(E)$. ($L^p(E)$是线性空间)

注意,对 $L^p(E)$,我们主要的兴趣在 $p\geqslant1$ 的情形,下文中若未指明 $p>0$,则一律认为是 $p\geqslant1$.

定义 2(共轭指标) 若 $p,p'>1$,且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$,则称 p 与 p' 为**共轭指标**(数). 注意到 $p'=\frac{p}{p-1}$,可知 $p=2$ 时 $p'=2$. 若 $p=1$,则规定共轭指标 $p'=\infty$;若 $p=\infty$,则规定共轭指标 $p'=1$.

定理 2(Hölder 不等式) 设 p 与 p' 为共轭指标,若 $f\in L^p(E)$,$g\in L^{p'}(E)$,则有$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\,\|g\|_{p'}$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,即

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\ (1<p<\infty)\text{以及}$$

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\|g\|_\infty\int_E|f(x)|\mathrm{d}x,\quad p=1\quad (p=\infty\text{即 } p'=1 \text{ 时类似}).$$

注 1 Hölder 不等式的一个重要特例就是 Schwarz 不等式,即$p=p'=2$ 的情形:

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_E|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

注 2 Hölder 不等式对$\|f\|_p$或$\|g\|_{p'}=+\infty$时自然成立.

定理 3(Minkowski 不等式) 若 $f,g\in L^p(E)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$,则

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 设 $m(E)<+\infty$, $0<p_1<p_2\leqslant+\infty$,则 $L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)$,且有

$$\|f\|_{p_1}\leqslant[m(E)]^{1/p_1-1/p_2}\cdot\|f\|_{p_2}.$$

(2) 设 $f\in L^r(E)\cap L^s(E)$. 若 p: $0<r<p<s\leqslant+\infty$满足

$$\frac{1}{p}=\frac{\lambda}{r}+\frac{1-\lambda}{s}\quad(0<\lambda<1),$$

则$\|f\|_p\leqslant\|f\|_r^\lambda\cdot\|f\|_s^{1-\lambda}$.

(3) 设 $0<r<p<s<+\infty$, $f\in L^p(E)$,则对任意的 $t>0$,存在分解: $f(x)=g(x)+h(x)$,使得

$$\|g\|_r^r\leqslant t^{r-p}\|f\|_p^p,\quad \|h\|_s^s\leqslant t^{s-p}\|f\|_p^p.$$

证明 (1) 不妨设 $p_2<\infty$. 令 $r=p_2/p_1$,则 $r>1$. 记 r'为 r 的共轭指标,则对 $f\in L^{p_2}(E)$,由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x&=\int_E[|f(x)|^{p_1}\cdot 1]\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_E|f(x)|^{p_1\cdot r}\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_E1^{r'}\mathrm{d}x\right)^{1/r'}\\&=(m(E))^{1/r'}\left(\int_E|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

从而可知

$$\left(\int_E|f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{1/p_1}\leqslant(m(E))^{(1/p_1)-(1/p_2)}\left(\int_E|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2},$$

即得所证.

(2) 事实上,当 $r<s<+\infty$时,我们有

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x&=\int_E|f(x)|^{\lambda p}|f(x)|^{(1-\lambda)p}\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_E|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\lambda p/r}\times\left(\int_E|f(x)|^s\mathrm{d}x\right)^{(1-\lambda)p/s}.\end{aligned}$$

当 $r<s=+\infty$时,因为 $p=r/\lambda$,所以有

$$\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \|f^{p-r}\|_\infty \int_E |f(x)|^r\mathrm{d}x = \|f\|_r^{p\lambda} \cdot \|f\|_\infty^{p(1-\lambda)}.$$

(3) 对 $t>0$,作函数

$$g(x) = \begin{cases} 0, & |f(x)| \leqslant t, \\ f(x), & |f(x)| > t, \end{cases} \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

我们有(注意 $r-p<0$)

$$\|g\|_r^r = \int_E |g(x)|^r\mathrm{d}x = \int_{E\cap\{x\in E:\ |f(x)|>t\}} |g(x)|^{r-p}|g(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant t^{r-p}\int_E |g(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant t^{r-p}\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

类似地可推第二个不等式.

例 2 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^2([0,1])$且 $f(x)\neq 0(0\leqslant x\leqslant 1)$, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,则 $\|F\|_2<\|f\|_2$.

(2) 设 $f\in L^2([0,1])$,则存在$[0,1]$上的递增函数 $F(x)$. 使得对任意的$[a,b]\subset[0,1]$,均有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant [F(b) - F(a)](b-a).$$

(3) 设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$, $0\leqslant f(x)\leqslant a^{2/3}$,则 $\int_0^1 \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant a^{2/3}$.

(4) 设 $1<p\leqslant r\leqslant q<+\infty$, $f\in L^q(E)$. 若

$$\frac{1}{r} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{q}, \quad 0<t<1,$$

则

$$\|f\|_r \leqslant \varepsilon\|f\|_p^{pt} + \varepsilon^{-r(1-t)/p}\|f\|_q^{r(1-t)}.$$

(5) 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$,若 $f_k\in L^p(E)$ $(k=1,2,\cdots)$,且级数 $\sum_{i=1}^\infty f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛,则

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty f_k\right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_p.$$

证明 (1) 应用 Schwarz 不等式,我们有

$$\|F\|_2^2 = \int_0^1\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1\left(\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x |f(t)|^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^1 x\,\|f\|_2^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\|f\|_2^2<\|f\|_2^2.$$

(2) 令 $F(x)=\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 1)$,我们有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=[F(b)-F(a)](b-a).$$

(3) 设 $p>1$,且改写 a 为 $a=\int_0^1 f(x)^{\frac{1}{2p}+1-\frac{1}{2p}}\mathrm{d}x$,则可得

$$a\leqslant\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\cdot a^{\frac{2p-1}{3p}},\quad a^{\frac{p+1}{3}}\leqslant\int_0^1\sqrt{f(x)}\mathrm{d}x.$$

从而令 $p\to 1+$,即可得证.

(4) 在 $ab\leqslant a^p/p+b^r/r\ (1/p+1/r=1)$中,以 $\varepsilon^{\frac{1}{p}}a$ 代 a,$\varepsilon^{-1/p}b$ 代 b,可知

$$ab\leqslant\varepsilon a^p/p+\varepsilon^{-r/p}b^r/r\leqslant\varepsilon a^p+\varepsilon^{-r/p}b^r.$$

对 $p\leqslant r\leqslant q$,$1/r=t/p+(1-t)/q$,我们有$\|f\|_r\leqslant\|f\|_p^t\,\|f\|_q^{1-t}$,从而即得所证.

(5) 注意不等式

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty f_k\right\|_p=\left(\int_E\left|\sum_{k=1}^\infty f_k(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\left(\int_E\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{k=1}^N f_k(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\varliminf_{N\to\infty}\left(\int_E\left|\sum_{k=1}^N f_k(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\varliminf_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N\|f_k\|_p=\sum_{k=1}^\infty\|f_k\|_p.$$

例 3 试证明下列命题:

(1) 设 $0<p_0<q_0<\infty$,若 $L^{p_0}(E)\subset L^{q_0}(E)$,则对$0<p<q$,有$L^p(E)\subset L^q(E)$.

(2) 设 $w(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负可积函数,记 $\mathrm{d}\mu(x)=w(x)\mathrm{d}x$.

(i) $L^q(\mathbf{R}^n,\mathrm{d}\mu)\subset L^p(\mathbf{R}^n,\mathrm{d}\mu)\ (1\leqslant p\leqslant q)$.

(ii) 设 $w\in L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$,则

$$L^q(\mathbf{R}^n)\subset L^p(\mathbf{R}^n,\mathrm{d}\mu)\quad(0<p\leqslant q).$$

(3) 设 $f\in AC([0,a])$,且 $f'\in L^p([0,a])(p>1)$,则存在 $C>0$,对任意的 b: $0<b<a$,使得

$$\int_0^a|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C\left\{a^p\int_0^a|f'(x)|^p\mathrm{d}x+\frac{a}{b}\int_0^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}.$$

证明 (1) 实际上，由 $L^{p_0}(E)\subset L^{q_0}(E)$ 可以推出其中的函数在 E 上是有界的. 反证法. 设 $f\in L^{p_0}(E)$，且记 $E_n=\{x\in E:\ |f(x)|>n\}$，则 $m(E_n)\to 0(n\to\infty)$. 易知存在 $\{n_k\}$，$\{m_k\}$，使得

$$m_k^{-\alpha}\leqslant m(E_{n_k}\backslash E_{n_{k-1}})<(m_k-1)^{-\alpha},\quad \alpha=\frac{3}{2}\frac{q_0}{q_0-p_0}.$$

现在作

$$g(x)=\begin{cases}m_k^{\beta}, & x\in E_{n_k}\backslash E_{n_{k-1}},\\ 0, & x\overline{\in} E_{n_k}\backslash E_{n_{k-1}},\end{cases}\quad \beta=\frac{3}{2}\frac{1}{q_0-p_0},$$

我们有

$$\int_E|g(x)|^{p_0}\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_k^{p_0\beta}}{(m_k-1)^{\alpha}}<+\infty,$$

这说明 $g\in L^{p_0}(E)$，但由于

$$\int_E|g(x)|^{q_0}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_k^{q_0\beta-\alpha}=+\infty,$$

使得 $f\overline{\in} L^{q_0}(E)$，矛盾.

(2) (i) 假定 $f\in L^q(\mathbf{R}^n,\mathrm{d}\mu)$，即 $\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^q w(x)\mathrm{d}x<+\infty$，则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p w^{p/q}(x)\cdot w^{1-p/q}(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^q w(x)\mathrm{d}x\right)^{p/q}\left(\int_{\mathbf{R}^n}w^{(1-p/q)\frac{q}{q-p}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-p}{q}}\\&=\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^q w(x)\mathrm{d}x\right)^{p/q}\left(\int_{\mathbf{R}^n}w(x)\mathrm{d}x\right)^{1-p/q}<+\infty.\end{aligned}$$

(ii) 只需注意不等式(对指标 q/p 与 $q/(q-p)$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p w^{p/q}(x)w^{1-p/q}(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^q w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbf{R}^n}w(x)\mathrm{d}x\right)^{1-p/q}\\&\leqslant\|w\|_\infty\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbf{R}^n}w(x)\mathrm{d}x\right)^{1-p/q}<+\infty.\end{aligned}$$

(3) 令 $F(x)=\left(\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}$ $(0<x\leqslant a)$，易知存在 $\xi_1,\xi_2\in$

$[0,a]$，使得$|f(\xi_1)|=F(b)$，$|f(\xi_2)|=F(a)$，我们有

$$|F(a)-F(b)| = ||f(\xi_2)|-|f(\xi_1)|| \leqslant |f(\xi_2)-f(\xi_1)|$$
$$= \left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^a |f'(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} a^{1/p'}$$

$(1/p+1/p'=1)$，由此可知

$$F(a) \leqslant a^{1/p'}\left(\int_0^a |f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} + b^{-1/p}\left(\int_0^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

$$a^{-1/p}\left(\int_0^a |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant a^{1/p'}\left(\int_0^a |f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$+ b^{-1/p}\left(\int_0^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

$$\int_0^a |f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \left\{a\left(\int_0^a |f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\frac{a}{b}\right)^{1/p}\left(\int_0^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right\}^p$$
$$\leqslant 2^p\left\{a^p\int_0^a |f'(x)|^p\mathrm{d}x + \frac{a}{b}\int_0^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}.$$

例 4 试证明下列命题：

（1）设$m(E)>0$. 若存在$M>0$，使得对任意的$p>1$，均有$\|f\|_p\leqslant M$，则$f\in L^\infty(E)$.

（2）设$w(x)$是$\mathbf{R}^n$上的非负可测函数. 若存在p_0,q_0：$1\leqslant p_0<q_0<+\infty$，使得$L^{p_0}(\mathbf{R}^n,\mathrm{d}\mu)\supset L^{q_0}(\mathbf{R}^n,\mathrm{d}\mu)$，则$w\in L^1(\mathbf{R}^n)$，其中

$$\mathrm{d}\mu = w(x)\mathrm{d}x.$$

证明 （1）令$E_n=\{x\in E: |f(x)|\geqslant n\}(n\in\mathbf{N})$，并假定对任意的$n\in\mathbf{N}$，均有$m(E_n)>0$，则

$$n\cdot(m(E_n))^{1/p} \leqslant \left(\int_{E_n} |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant M \quad (p>1).$$

令$p\to+\infty$，可得$n\leqslant M(n\in\mathbf{N})$，导致矛盾. 因此，存在$n_0\in\mathbf{N}$，使得$m(E_{n_0})=0$，即$|f(x)|\leqslant n_0$，a. e. $x\in E$.

（2）易知存在$\lambda>0$，使得对$\mathbf{R}^n$上的实值可测函数$f(x)$，有

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^{p_0} w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p_0} \leqslant \lambda\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^{q_0} w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q_0}.$$

记$\mathbf{R}^n$内以原点为中心r为半径的球为$B(0,r)$，若令$f(x)=\chi_{B(0,r)}(x)$，

我们有

$$\left(\int_{B(0,r)} w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p_0}\leqslant\lambda\left(\int_{B(0,r)} w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q_0},\quad \int_{B(0,r)} w(x)\mathrm{d}x\leqslant\lambda^{\frac{p_0q_0}{q_0-p_0}}.$$

从而令 $r\to+\infty$，即得 $\int_{\mathbf{R}^n} w(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

例 5 试证明下列命题：

(1) 设 $f,g\in L^3(E)$，且有

$$\|f\|_3=\|g\|_3=\int_E f^2(x)g(x)\mathrm{d}x=1,$$

则 $g(x)=|f(x)|$, a. e. $x\in E$.

(2) 设 $a>1,b>1,0<\lambda<a,0<\mu<b,f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上非负可测，则存在 $C=C(a,b,\lambda,\mu)$，使得

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^{a\mu+b\lambda}\leqslant C\left(\int_0^{+\infty} x^{a-1-\lambda} f^a(x)\mathrm{d}x\right)^{\mu}\cdot\left(\int_0^{+\infty} x^{b-1+\mu} f^b(x)\mathrm{d}x\right)^{\lambda}.$$

证明 (1) 令 $p=3/2,p'=3$，则得

$$1=\left|\int_E f^2(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E f^2(x)|g(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\|f^2\|_p\cdot\|g\|_{p'}=(\|f\|_3)^2\cdot\|g\|_3=1,$$

从而有 $\int_E f^2(x)|g(x)|\mathrm{d}x=\|f^2\|_p\cdot\|g\|_{p'}=1$. 因此有

$$|f(x)|^3=|g(x)|^3,\quad |f(x)|=|g(x)|,\quad \text{a.e. } x\in E,$$

$$\int_E f^2(x)[|g(x)|-g(x)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_E f^2(x)|g(x)|\mathrm{d}x-\int f^2(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|^3\mathrm{d}x-1=0.$$

(2) 易知

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x^{\alpha/a}f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha/a}(1+x)}$$
$$+\int_0^{+\infty} x^{\beta/b}f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x^{\beta/b}(1+x^{-1})}$$
$$\triangleq \text{I}+\text{II}.$$

$(\alpha=a-1-\lambda,\beta=b-1-\mu)$. 分别估计 I，II，我们有

$$\text{I}\leqslant M_1\cdot\left(\int_0^{+\infty} x^\alpha\cdot f^a(x)\mathrm{d}x\right)^{1/a},\quad \text{II}\leqslant M_2\left(\int_0^{+\infty} x^\beta\cdot f^b(x)\mathrm{d}x\right)^{1/b},$$

$$M_1=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{\alpha}{a-1}}(1+x)^{\frac{a}{a-1}}}\right)^{\frac{a-1}{a}},\quad M_2=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{\beta}{b-1}}(1+x^{-1})^{\frac{b}{b-1}}}\right)^{\frac{b-1}{b}}.$$

以 $f(z/t)(t>0)$ 代换 $f(x)$，并令 $z=tx$，可得

$$t^{-1}\int_0^{+\infty}f\left(\frac{z}{t}\right)\mathrm{d}z\leqslant M_1t^{\frac{\lambda-a}{a}}\left(\int_0^{+\infty}z^{\alpha}\cdot f^a\left(\frac{z}{t}\right)\mathrm{d}z\right)^{1/a}$$
$$+M_2t^{\frac{\mu-b}{b}}\left(\int_0^{+\infty}z^{\beta}\cdot f^b\left(\frac{z}{t}\right)\mathrm{d}z\right)^{1/b}.$$

注意到对一切非负可测函数 $\varphi(z)$，均有不等式

$$\int_0^{+\infty}\varphi(z)\mathrm{d}z\leqslant M_1t^{\lambda/a}\left(\int_0^{+\infty}z^{\alpha}\varphi^a(z)\mathrm{d}z\right)^{1/a}+M_2t^{-\mu/b}\left(\int_0^{+\infty}z^{\beta}\varphi^b(z)\mathrm{d}z\right)^{1/b}$$

成立，故在上式中对 t 求其极小值，即可证得结论.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $\lambda\in\mathbf{R}^1$，则 $4\sin^2\lambda-\lambda\cdot\sin(2\lambda)\leqslant 2\lambda^2$.

(2) 设 $f\in L^2([0,1])$. 令 $g(x)=\int_0^1\frac{f(t)}{|x-t|^{1/2}}\mathrm{d}t\,(0<x<1)$，则

$$\left(\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

(3) 设 p,q,r 是正数，且 $0<t<1/(p+q+r)$. 则

$$I=\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(x^p\cdot|x-1|^q|x-2|^r)^t}<+\infty.$$

证明 (1) 由不等式 $\left(\int_0^{\lambda}\cos x\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_0^{\lambda}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\lambda}\cos^2x\mathrm{d}x\right)$ 可知，$\sin^2\lambda\leqslant\lambda^2/2+\lambda\sin(2\pi)/4$. 由此即得所证.

(2) 注意下列不等式 $(0<x<1)$

$$|g(x)|^2\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{|x-t|^{1/2}}\cdot\int_0^1\frac{|f(t)|^2\mathrm{d}t}{|x-t|^{1/2}}\leqslant 2\sqrt{2}\cdot\int_0^1\frac{|f(t)|^2\mathrm{d}t}{|x-t|^{1/2}},$$

$$\int_0^1|g(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\sqrt{2}\int_0^1\left(\int_0^1|x-t|^{-1/2}f^2(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\leqslant 8\int_0^1|f(t)|^2\mathrm{d}t,$$

$$\|g\|_2\leqslant 2\sqrt{2}\;\|f\|_2.$$

(3) 记 $\delta=pt+qt+rt$，注意 $\delta<1$，而有 $\frac{1}{\delta/(tp)}+\frac{1}{\delta/(tq)}+\frac{1}{\delta/(tr)}=1$. 从而得

$$I=\int_0^2\left(\frac{1}{x}\right)^{pt}\left(\frac{1}{|x-1|}\right)^{qt}\left(\frac{1}{|x-2|}\right)^{rt}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left(\int_0^2\left(\frac{1}{x}\right)^{pt\cdot\frac{\delta}{pt}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{pt}{\delta}}\cdot\left(\int_0^2\left(\frac{1}{|x-1|}\right)^{qt\frac{\delta}{qt}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{qt}{\delta}}$$

$$\cdot\left(\int_0^2\left(\frac{1}{|x-2|}\right)^{rt\frac{\delta}{rt}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{rt}{\delta}}<+\infty.$$

例 7 试证明下列命题：

(1) 对 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2\cdots,y_n)$，记 $|x|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$，$|x-y|=\left(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$. 现在设 $p>0$，$E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $m(E)=m(B(0,r))$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$，有

$$\int_E\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^p}\leqslant\int_{B(0,r)}\frac{\mathrm{d}z}{|z|^p}.$$

(2) 设 $f(x,y)$，$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上连续，且在边界 $x^2+y^2=1$ 上之值为 0，则

$$\|f\|_{\frac{2p}{2-p}}\leqslant C_p(\|f'_x\|_p+\|f'_y\|_p)\quad(1\leqslant p<2).$$

证明 (1) 令 $E_x=\{x-y:y\in E\}$，易知 $\int_E\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^p}=\int_{E_x}\frac{\mathrm{d}z}{|z|^p}$. 再令 $\widetilde{E}=E_x\cap B(0,r)$，$A=E_x\setminus\widetilde{E}$，则 $m(A)=m(B(0,r)\setminus\widetilde{E})$. 我们有 $\sup\{1/\|z\|^p:z\in A\}\leqslant r^{-p}=\inf\{\|z\|^{-p}:z\in B(0,r)\}$. 因此得

$$\int_A\|z\|^{-p}\mathrm{d}z\leqslant r^{-p}m(A)\leqslant\int_{B(0,r)\setminus\widetilde{E}}\|z\|^{-p}\mathrm{d}z,$$

$$\int_E|x-y|^{-p}\mathrm{d}y=\int_{\widetilde{E}}\|z\|^{-p}\mathrm{d}z+\int_A\|z\|^{-p}\mathrm{d}z$$

$$\leqslant\int_{\widetilde{E}}\|z\|^{-p}\mathrm{d}z+\int_{B(0,r)\setminus\widetilde{E}}\|z\|^{-p}\mathrm{d}z=\int_{B(0,r)}\|z\|^{-p}\mathrm{d}z.$$

(2) (i) $p=1$. 令 $f(x,y)=0((x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus D)$，我们有

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^x f'_1(t,y)\mathrm{d}t,\quad f(x,y)=\int_{-\infty}^y f'_2(x,s)\mathrm{d}s.$$

从而知 $|f(x,y)|\leqslant\int_{-\infty}^x|f'_1(t,y)|\mathrm{d}t$，$|f(x,y)|\leqslant\int_{-\infty}^y|f'_2(x,s)|\mathrm{d}s$. 又

有

$$|f(x,y)|^2\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1'(t,y)|\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|f_2'(x,s)|\mathrm{d}s,$$

$$\iint_D|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint_D|f_x'(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\iint_D|f_y'(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\|f\|_2\leqslant\|f_1'\|_1^{1/2}\|f_2'\|_1^{1/2}\leqslant(\|f_1'\|_1+\|f_2'\|_1)/2.\qquad(*)$$

(ii) $1<p<2$. 令 $q=p/(2-p)$,并在式(*)中用 f^q 代 f,可知

$$\begin{aligned}\|f^q\|_2&\leqslant(\|qf^{q-1}\cdot f_1'\|_1+\|qf^{q-1}\cdot f_2'\|_1)/2\\&\leqslant q(\|f^{q-1}\|_{p'}\|f_1'\|_p+\|f^{q-1}\|_{p'}\|f_2'\|_p)/2\\&\qquad(1/p+1/p'=1).\end{aligned}$$

注意,$\|f^q\|_2=\|f\|_{2q}^q$,$\|f^{q-1}\|_{p'}=\|f\|_{(q-1)p'}^{q-1}=\|f\|_{2p/(2-p)}^{q-1}$,即可得证.

例 8 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^p(E)$,$e\subset E$ 是可测子集,则($p\geqslant1$)

$$\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_{E\setminus e}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

(2) 下列两个不等式是不能同时成立的:

(i) $\int_0^\pi[f(x)-\sin x]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{9}$; (ii) $\int_0^\pi[f(x)-\cos x]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{9}$.

(3) 设 $1\leqslant p<+\infty$,$0\leqslant a\leqslant1$,$f(x)$,$g(x)$是 E 上非负可测函数,则

$$a^{1-1/p}\|f\|_p+(1-a)^{1-1/p}\|g\|_p\leqslant\|f+g\|_p.$$

(4) 设 $0<p<1$,$f\in L^p(E)$,$g\in L^p(E)$,则

$$\|f+g\|_p\leqslant2^{1/p-1}(\|f\|_p+\|g\|_p).$$

证明 (1) 我们作函数

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in e,\\0, & x\in E\setminus e,\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}0, & x\in e,\\f(x), & x\in E\setminus e,\end{cases}$$

则 $f(x)=g(x)+h(x)$($x\in E$). 从而可知(Minkowski 不等式)

$$\begin{aligned}\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}&=\left(\int_E|g(x)+h(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\&\leqslant\left(\int_E|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_E|h(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$= \left(\int_e |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_{E\setminus e} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

(2) 反证法. 假定两个不等式同时成立,则可得

$$\pi = \int_0^\pi (1 - \sin 2x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi (\cos x - \sin x)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi |f(x) + \cos x - f(x) - \sin x|^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_0^\pi |f(x) + \cos x|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_0^\pi |f(x) + \sin x|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant 1.$$

这导致矛盾.

(3) 注意由 $f^p(x)+g^p(x)\leqslant[f(x)+g(x)]^p$,可知 $(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)^{1/p} \leqslant\|f+g\|_p$. 应用不等式

$$a^{1-1/p}|x| + (1-a)^{1-1/p}|y| \leqslant (|x|^p + |y|^p)^{1/p},$$

立即得到

$$a^{1-1/p}\|f\|_p+(1-a)^{1-1/p}\|g\|_p\leqslant(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)^{1/p}\leqslant\|f+g\|_p.$$

(4) (i) 应用不等式 $1+t^p\geqslant(1+t)^p(0\leqslant t<+\infty)$ 可知

$$\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \geqslant \|f + g\|_p^p.$$

(ii) 由于函数 $\varphi(t)=(1+t^{1/p})(1+t)^{-1/p}(0\leqslant t<+\infty)$ 在 $t=1$ 处有唯一极小值 $\varphi(1)=2^{1-1/p}$,故可知

$$(1 + t)^{1/p} \leqslant 2^{1/p-1}(1 + t^{1/p}) \quad (0 \leqslant t < +\infty).$$

取 $t=\|f\|_p^p/\|g\|_p^p$,我们有

$$(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{1/p} \leqslant 2^{1/p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

从而结合(i)即得所证.

例 9 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可测函数,则

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right) \geqslant (b-a)^2.$$

(2) 设 $m(E)=1$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 E 上正值可测函数. 若 $f(x)g(x) \geqslant 1 (x\in E)$,则

$$\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_E g(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant 1.$$

(3) 设 $f(x)$与 $g(x)$均是 E 上可测函数，且 $1/p+1/q=1/r(1\leqslant p<\infty)$，则$\|fg\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

(4) 设 $f(x)$与 $g(x)$在 E 上正值可测，$\int_E g(x)\mathrm{d}x=1$，则

$$\left(\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^p\leqslant\int_E f^p(x)g(x)\mathrm{d}x\quad(p>1).$$

证明 (1) 注意到$(b-a)^2=\left(\int_a^b 1\mathrm{d}x\right)^2$，故有

$$(b-a)^2=\left(\int_a^b\sqrt{\frac{f(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x.$$

(2) 注意到 $1=m(E)^2=\left(\int_E 1\mathrm{d}x\right)^2$，我们有

$$1\leqslant\left(\int_E\sqrt{f(x)g(x)}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $\int_E|f(x)g(x)|^r\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f(x)|^{r\frac{p}{r}}\mathrm{d}x\right)^{r/p}\left(\int_E|g(x)|^{r\frac{q}{r}}\mathrm{d}x\right)^{r/q}$（注意 $r/p+r/q=1$）.

(4) 对 p 与 $p/(p-1)$用 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}\left(\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^p&=\left(\int_E f(x)g^{1/p}(x)\cdot g^{1-1/p}(x)\mathrm{d}x\right)^p\\&\leqslant\left(\int_E f^p(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^{p/p}\left(\int_E g^{\frac{p-1}{p}\frac{p}{p-1}}(x)\mathrm{d}x\right)^{p-1}\\&=\int_E f^p(x)g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 10 试证明下列命题：

(1) 设 $g(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，若对任意的 $f\in L^2(E)$，有$\|g\cdot f\|_2\leqslant M\|f\|_2$，则$|g(x)|\leqslant M$, a.e. $x\in E$.

(2) 设 $g\in C^{(1)}([0,1])$，且 $g(0)=0,g(1)=1,g(x)$在$[0,1]$上递增. 若 $\int_0^1[g'(x)]^p/g(x)\mathrm{d}x<+\infty(+\infty>p>1)$，则

$$I=\int_0^1[g'(x)]^p/g(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p.$$

证明 (1) 反证法. 令 $A=\{x\in E:|g(x)|>M\}$，假定 $m(A)>0$，则对$f(x)=\chi_A(x)$，可得$\|f\|_2=\sqrt{m(A)}$. 从而有

$$\|gf\|_2 = \left(\int_A |g(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} > M\sqrt{m(A)} = M\|f\|_2.$$

这导致矛盾. 故 $m(A)=0$,结论得证.

(2) 对正值 $f\in L^p((0,\infty))$,令 $F(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则由 $F(x)=\int_0^1 f[xg(t)]g'(t)\mathrm{d}t$ 可知

$$\int_0^{+\infty} F^p(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{[g'(t)]^p}{g(t)}\mathrm{d}t \cdot \int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x.$$

再注意公式 $\int_0^{+\infty} F^p(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x$ 中的 $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ 是最佳常数(见 §6.4 例 2 之(1)),即可得证.

例 11 试证明下列不等式:

(1) 设 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\beta<1$. 若 $f\in L^{1+\alpha}(E), g\in L^{1+\beta}(E)$, 且 $f^{1+\alpha}g^{1+\beta}\in L^1(E)$, 则

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|^{(1+\alpha)(1+\beta)/(1-\alpha\beta)} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^{1+\alpha}|g(x)|^{1+\beta}\mathrm{d}x\right)$$
$$\times \left(\int_E |f(x)|^{1+\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\beta(1+\alpha)/(1-\alpha\beta)} \left(\int_E |g(x)|^{1+\beta}\mathrm{d}x\right)^{\alpha(1+\beta)/(1-\alpha\beta)}.$$

(2) 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上非负可测函数, $1\leqslant p<+\infty, 1\leqslant q<+\infty, 1\leqslant r\leqslant+\infty, \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$,则

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p^{1-p/r}\|g\|_q^{1-q/r}\left(\int_E f^p(x)g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{1/r}.$$

(3) 设 $f(x)$ 是 $E\subset(0,\infty)$ 上正值可测函数, $m(E)>0, 0<r<+\infty$,则

$$\left(\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)^{-1} \leqslant \left(\frac{1}{m(E)}\int_E \frac{\mathrm{d}x}{f^r(x)}\right)^{1/r}.$$

(4) 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上正值可测函数, $0<p<1, q=p/(p-1)$, 则

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_E f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

证明 (1) 注意 $\dfrac{1-\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}+\dfrac{\beta}{1+\beta}+\dfrac{\alpha}{1+\alpha}=1$. 并作分解

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|^{\frac{1-\alpha\beta}{1+\beta}}|g(x)|^{\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha}}|f(x)|^{\frac{(1+\alpha)\beta}{1+\beta}}|g(x)|^{\frac{(1+\beta)\alpha}{1+\alpha}},$$

再用 Hölder 不等式即可证得.

(2) $r=+\infty$时即 Hölder 不等式. 若 $r<+\infty, p>1, q>1$,则注意等式

$$\frac{r-p}{rp}+\frac{r-q}{rq}+\frac{1}{r}=1,$$

并用 Hölder 不等式;若 $p=q=1$,则 $r=1$. 若 $p>1, q=1$,则 $r=p$ 等可类似地做.

(3) 令 $p=1+1/r>1$,则 $1/p+1/rp=1$. 对这些指标用 Hölder 不等式,可知

$$m(E)=\int_E f^{1/p}(x)\cdot f^{-1/p}(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E f^{-r}(x)\mathrm{d}x\right)^{1/rp}.$$

从而得$[m(E)]^{1+1/r}\leqslant\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_E f^{-r}(x)\mathrm{d}x\right)^{1/r}$,证毕.

(4) 作分解 $f^p(x)=[f(x)g(x)]^p[g(x)]^{-p}$,并且对指标 $1/p$ 与 $1/(1-p)$用 Hölder 不等式,我们有

$$\int_E f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^p\left(\int_E[g(x)]^{p/(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{1-p}.$$

由此即可得证.

例 12 试证明下列不等式:

(1) 设 $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上非负可测函数,且记

$$I_1=\int_{\mathbf{R}^2}f_1^2(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z;\quad I_2=\int_{\mathbf{R}^2}f_2^2(x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z;\quad I_3=\int_{\mathbf{R}^2}f_3^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $F(x,y,z)=f_1(y,z)f_2(x,z)f_3(x,y)$,则

$$I=\int_{\mathbf{R}^3}F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant(I_1I_2I_3)^{1/2}.$$

(2) 设 $p_i>1(i=1,2,\cdots,n), p>1$ 且$\sum_{i=1}^{n}1/p_i=1/p$. 若 $f_i\in L^{p_i}(E)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$f_1f_2\cdots f_n\in L^p(E),\quad 且有\quad \|f_1\cdots f_n\|_p\leqslant\|f_1\|_p\cdots\|f_n\|_p.$$

(3) 设 $p_i>1$ $(i=1,2,\cdots,k)$,且$\sum_{i=1}^{k}1/p_i=1$. 若 $f_i\in L^{p_i}(E)$ $(i=1,2,\cdots,k)$,则

$$\int_E |f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)|\mathrm{d}x \leqslant \|f_1\|_{p_1}\cdot\|f\|_{p_2}\cdots\|f\|_{p_k}.$$

(4) 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)$, $p=(n+1)/n$, 试证明

$$\int_{\mathbf{R}^n}|f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_n)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\leqslant \|f\|_p^{n+1}.$$

(5) 设 $R_i=\mathbf{R}^1(i=1,2,\cdots,n)$, 非负可测函数

$$f_1=f_1(x_2,x_3,\cdots,x_n),\quad f_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),$$

$$f_i\triangleq f_i(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\quad(i=2,\cdots,n-1)$$

定义在 $\widetilde{\mathbf{R}}_i=R_1\times R_2\times\cdots\times R_{i-1}\times R_{i+1}\times\cdots\times R_n$ 上, 且记

$$I_i=\int_{\widetilde{\mathbf{R}}_i}f_i^{n-1}(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则
$$I=\int_{\mathbf{R}^n}f_1f_2\cdots f_n\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\leqslant(I_1\cdots I_n)^{1/(n-1)}.$$

证明 (1) 引用 Hölder 不等式, 可知

$$I=\int_{\mathbf{R}^2}f_1(y,z)\left(\int_{\mathbf{R}^1}f_2(x,z)f_3(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^2}f_1(y,z)\left(\int_{\mathbf{R}^1}f_2^2(x,z)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbf{R}^1}f_3^2(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^2}f_1^2(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)^{1/2}\left[\int_{\mathbf{R}^2}\left(\int_{\mathbf{R}^1}f_2^2(x,z)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbf{R}^1}f_3^2(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]^{1/2}$$

$$=I_1^{1/2}\left(\int_{\mathbf{R}^2}f_2^2(x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbf{R}^2}f_3^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}.$$

(2) 对 $n=2$, $f_1^p\in L^{p_1/p}$, $f_2^p\in L^{p_2/p}$, 我们有

$$\left(\int_E|f_1(x)|^p|f_2(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\left(\int_E|f_1(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{1/p_1}\left(\int_E|f_2(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}.$$

现在假定对 $n=k$, 该不等式成立, 则对 $n=k+1$, 有

$$0<\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p_{k+1}}=1/(pp_{k+1}/(p_{k+1}-p))<1,$$

即 $pp_{k+1}/(p_{k+1}-p)>1$. 由归纳法假定应有

$$f_1f_2\cdots f_k \in L^{pp_{k+1}/(p_{k+1}-p)}(E),$$

$$\left(\int_E [f_1(x)\cdots f_k(x)]^{pp_{k+1}/(p_{k+1}-p)}\mathrm{d}x\right)^{(p_{k+1}-1)/p_{k+1}p} \leqslant \|f_1\|_{p_1}\cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

根据 $n=2$，$(f_1\cdots f_k)\cdot f_{k+1}\in L^p(E)$，且有

$$\|(f_1\cdots f_k)f_{k+1}\|_p \leqslant \|f_1\cdots f_k\|_{pp_{k+1}/(p_{k+1}-p)}\cdot \|f_{k+1}\|_{p_{k+1}}.$$

由此即得所证.

(3) 证略.

(4) 因为$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}$(共 $n+1$ 项)$=1$,

$$\begin{aligned}
&f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)f(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\
&\quad=\{[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)f(x_1+x_2+\cdots+x_n)]^{1/n}\}^n\\
&\quad=[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)]^{1/n}\\
&\qquad\times[f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)f(x_1+x_2+\cdots+x_n)]^{1/n}\\
&\qquad\times[f(x_1)f(x_3)\cdots f(x_n)f(x_1+x_2+\cdots+x_n)]^{1/n}\\
&\qquad\times\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\times[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{n-1})f(x_1+x_2+\cdots+x_n)]^{1/n},
\end{aligned}$$

所以我们有($\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n}|f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\cdot f(x_1+x_2+\cdots+x_n)|\mathrm{d}x\\
&\quad\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x_1)\cdots f(x_n)|^{(n+1)/n}\mathrm{d}x\right)^{1/(n+1)}\\
&\qquad\times\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x_2)\cdots f(x_n)f(x_1+\cdots+x_n)|^{(n+1)/n}\mathrm{d}x\right)^{1/(n+1)}\\
&\qquad\times\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\times\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x_1)\cdots f(x_{n-1})f(x_1+\cdots+x_n)|^{(n+1)/n}\mathrm{d}x\right)^{1/(n+1)}\\
&\quad=\left(\int_{\mathbf{R}^1}|f(x_1)|^p\mathrm{d}x_1\right)^{n/(n+1)}\cdots\left(\int_{\mathbf{R}^1}|f(x_1)|^p\mathrm{d}x_1\right)^{n/(n+1)}.
\end{aligned}$$

(5) 当 $n=2$ 时，不等式显然成立. 现在假定当 $n-1$ 时不等式成立，则考查积分

$$I=\int_{\mathbf{R}^n}f_1\cdots f_n\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{\tilde{\mathbf{R}}_1}f_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\cdot\int_{\mathbf{R}^1}f_2\cdots f_n\mathrm{d}x_1,$$

记 $F_i=\int_{\tilde{\mathbf{R}}_i} f_i^{n-1}\mathrm{d}x_1$，则根据 Hölder 不等式可得

$$I\leqslant\int_{\tilde{\mathbf{R}}_1} f_1\cdot F_2^{\frac{1}{n-1}}\cdots F_n^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

再对 $p=n-1,q=(n-1)/(n-2)$ 用 Hölder 不等式又得(注意归纳法假设)

$$I<I_1^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{\tilde{\mathbf{R}}_1} F_2^{\frac{1}{n-2}}\cdots F_n^{\frac{1}{n-2}}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

$$<I_1^{\frac{1}{n-1}}\left[\left(\prod_{i=2}^{n}J_i\right)^{\frac{1}{n-2}}\right]^{\frac{n-2}{n-1}}=I_1^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=2}^{n}J_i\right)^{\frac{1}{n-1}}=(I_1\cdots I_n)^{\frac{1}{n-1}}.$$

$$\left(J_i=\int_{\tilde{\mathbf{R}}_i}(F_i^{\frac{1}{n-2}})^{n-2}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n\right.$$

$$=\int_{\tilde{\mathbf{R}}_i}F_i\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\left.=\int_{\tilde{\mathbf{R}}_1}\left(\int_{R_i}f_i^{n-1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n=I_i\right)$$

特例 设 V 是 $\mathbf{R}^3$ 中封闭的立体区域，记 S_1,S_2,S_3 为此立体在各个坐标平面上的投影，则 V 的体积 $m(V)\leqslant\sqrt{S_1S_2S_3}$.（记 E_1,E_2,E_3 为其投影区域集，注意 $\chi_V(x,y,z)\leqslant\chi_{E_1}(x,y)\cdot\chi_{E_2}(y,z)\cdot\chi_{E_3}(x,z)$.）

例 13 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，$f_*(x)$是其分布函数(参阅§4.6). 若 $\sup\{\lambda f_*(\lambda)\}<+\infty$，则称 $f\in L_*(\mathbf{R}^n)$.

(i) 若 $f\in L_*(\mathbf{R}^n)$，且 $m(\{x\in\mathbf{R}^n: f(x)\neq 0\})<+\infty$，则 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)(0<p<1)$.

(ii) 若 $f\in L_*(\mathbf{R}^n)\cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$，则 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)(1<p<+\infty)$.

(2) 设 $m(E)<\infty$，且 $f(x),F(x)$都是 E 上非负可测函数. 对 $t>0$，若有

$$m(\{x\in E: F(x)>t\})\leqslant\frac{1}{t}\int_{\{x\in E: F(x)>t\}}f(x)\mathrm{d}x,$$

则
$$\left(\int_E F^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\frac{p}{p-1}\left(\int_E f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p},\quad p>1.$$

(3) 设 $m(E)>0$，$f(x)$是 E 上非负可测函数，且有

$$\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant A > 0;\quad \frac{1}{m(E)}\int_E f^2(x)\mathrm{d}x < B.$$

若对 $\delta>0$，记 $E_\delta=\{x\in E:\ f(x)>\delta A\}$，则

$$m(E_\delta) \geqslant m(E)(1-\delta)^2A^2/B.$$

(4) $f\in L^p(E)$的充分必要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $g\in L^p(E)$且 $g(x)\geqslant 0(x\in E)$，使得

$$\int_{\{x\in E:\ |f(x)|>g(x)\}} |f(x)|^p < \varepsilon.$$

证明 (1) (i) 记 $M=m(\{x\in \mathbf{R}^n:\ f(x)\neq 0\})$，则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x &= p\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &= p\left\{\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right\}\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant pM\int_0^1\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda + p\int_1^{+\infty}\lambda^{p-2}(\lambda f_*(\lambda))\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant M + p\,\|f\|_1\int_1^{+\infty}\lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda = M+\frac{p}{1-p}\|f\|_1.\end{aligned}$$

(ii) 注意 $\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_0^{\|f\|_\infty}\lambda^{p-2}(\lambda f_*(\lambda))\mathrm{d}\lambda<+\infty.$

(2) 不妨设 $f\in L^p(E)$，$F_n(x)=\min\{F(x),n\}$，则

$$\begin{aligned}\int_E F_n^p(x)\mathrm{d}x &= p\int_0^n\lambda^{p-1}(F_n)_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda = p\int_0^n\lambda^{p-2}\int_{\{x\in E:\ F_n(x)>\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x \\ &= p\int_E f(x)\mathrm{d}x\int_0^{F_n(x)}\lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{p-1}\int_E f(x)F_n^{p-1}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此知(用 Hölder 不等式)

$$\left(\int_E F_n^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_E f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

再令 $n\to\infty$即可.

(3) 注意，$(1-\delta)Am(E)\leqslant\int_{E_\delta}f(x)\mathrm{d}x\leqslant m^{\frac{1}{2}}(E)\cdot B^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}(E_\delta)$.

(4) 必要性 取 $g(x)=2|f(x)|(x\in E)$，我们有

$\{x\in E:\ |f(x)|\geqslant g(x)\}$

$$=\{x\in E: f(x)=0\}\cup\{x\in E: |f(x)|=+\infty\}.$$

充分性 $$\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x=\int_{\{x\in E:\ |f(x)|>g(x)\}}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\{x\in E:\ |f(x)|\leqslant g(x)\}}|f(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \varepsilon+\int_E g^p(x)\mathrm{d}x<+\infty.$$

例 14 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$是$[0,1]$上的非负可测函数,且有

$$m(\{x\in[0,1]: f(x)\geqslant t\})<1/(1+t^2)\quad (t>0),$$

试求 p 值,使得 $f\in L^p([0,1])$.

(2) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上是局部可积的,$1<p<\infty$,试证明下列条件是等价的:

(i) $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$;

(ii) 存在 $M>0$,对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意有限个互不相交的正测集 $E_1,E_2,\cdots,E_k$,有

$$\sum_{i=1}^k\left(\frac{1}{m(E_i)}\right)^{p-1}\left|\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\right|^p\leqslant M.$$

解 (1) 对 $p\in[1,2)$,我们有

$$\sum_{n=1}^\infty m(\{x\in[0,1]: f^p(x)\geqslant n\})$$
$$=\sum_{n=1}^\infty m(\{x\in[0,1]: f(x)\geqslant n^{1/p}\})$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{1+n^{2/p}}<\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{2/p}}<+\infty;\quad f^p\in L^1([0,1]).$$

对 $p\geqslant 2$,令 $f(x)=1/\sqrt{x}-1$,可知 $f\overline{\in} L^p([0,1])$. 而

$$m(\{x\in[0,1]: f(x)\geqslant t\})=m(\{x\in[0,1]: 1/\sqrt{x}-1\geqslant t\})$$
$$=m(\{x\in[0,1]: x\leqslant 1/(1+t)^2\})=\frac{1}{(1+t)^2}<\frac{1}{1+t^2},$$

故它是满足题设条件的.

(2) (i)⇒(ii) 注意 $\left|\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\right|^p\leqslant(m(E_i))^{p/p'}\cdot\int_{E_i}|f(x)|^p\mathrm{d}x$

(其中 p,p' 为共轭指标)，并令 $M=\|f\|_p^p$ 即可.

(ii)⇒(i)　作 $g(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot\chi_{E_i}(x)$，则

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}C_i\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(m(E_i))^{\frac{1-p}{p}}\left|\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\right||C_i|(m(E_i))^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(m(E_i))^{1-p}\left|\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\right|^{p}\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n}|C_i|^{p'}(m(E_i))^{\frac{p'(p-1)}{p}}\right]^{1/p'}$$

$$\leqslant M^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|C_i|^{p'}m(E_i)\right)^{1/p'}=M^{1/p}\|g\|_{p'}.$$

由此易知 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$.

例 15　试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L([0,1])$，则 $\lim\limits_{p\to0+}\int_{[0,1]}|f(x)|^p\mathrm{d}x=1$.

(2) 设 $f\in L^1(E)\cap L^2(E)$，则

$$\lim_{p\to1+}\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $0<q<p\leqslant+\infty,m(E)<+\infty$，则

$$\lim_{q\to p-}\left(\int_E|f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}=\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

证明　(1) 注意到 $|f(x)|^p\leqslant1(|f(x)|\leqslant1)$；$|f(x)|^p\leqslant|f(x)|$ $(|f(x)|>1)$，记 $E_1=\{x\in[0,1]:|f(x)|>1\}$，$E_2=\{x\in E:|f(x)|\leqslant1\}$，我们有(积分号下取极限)

$$\lim_{p\to0+}\int_0^1|f(x)|^p\mathrm{d}x=\lim_{p\to0+}\int_{E_1}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\lim_{p\to0+}\int_{E_2}|f(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$=m(E_1)+m(E_2)=1.$$

(2) 令 $E_1=\{x\in E:|f(x)|\geqslant1\}$，$E_2=E\setminus E_1$，则对 $2>p_2>p_1>1$，有

$$|f(x)|^{p_1}\geqslant|f(x)|^{p_2}\quad(x\in E_2);\qquad|f(x)|^{p_2}\geqslant|f(x)|^{p_1}\quad(x\in E_1),$$

从而知

$$\lim_{p\to 1+}\int_{E_2}|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{E_2}|f(x)|\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{p\to 1+}\int_{E_1}[|f(x)|^p-|f(x)|]\mathrm{d}x=\int_{E_1}0=0.$$

由此即得所证.

特别有：若 $f\in L^1(E)\cap L^2(E)$，则 $\lim\limits_{p\to 1+}\|f\|_p=\|f\|_1$，实际上，下述推断成立：

$$\lim_{p\to 1+}\|f\|_p=\lim_{p\to 1+}\mathrm{e}^{\frac{\ln\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x}{p}}=\mathrm{e}^{\ln\int_E|f(x)|\mathrm{d}x}=\|f\|.$$

(3) (i) 因为

$$\|f\|_q^q=\int_E|f(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant[m(E)]^{q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{q/p},$$

所以可得 $\overline{\lim\limits_{q\to p-}}\|f\|_q\leqslant\|f\|_p$.

(ii) 根据 Levi 引理和控制收敛定理，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{q\to p-}\|f\|_q^q&=\lim_{q\to p-}\int_{\{x\in E:\ |f(x)|>1\}}|f(x)|^q\mathrm{d}x\\&\quad+\lim_{q\to p-}\int_{\{x\in E:\ |f(x)|\leqslant 1\}}|f(x)|^q\mathrm{d}x\\&=\int_{\{x\in E:\ |f(x)|>1\}}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\{x\in E:\ |f(x)|\leqslant 1\}}|f(x)|^p\mathrm{d}x=\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

例 16 试证明下列极限等式：

(1) 设 $f\in L^1([0,1])$，且 $f(x)>0$ $(x\in[0,1])$，则

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p=\exp\left\{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

(2) 设 $f(x),w(x)$是 E 上非负可测函数. 若有

$$\int_E w(x)\mathrm{d}x=1,\quad\int_E f(x)w(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

则
$$\lim_{p\to 0+}\left(\int_E f^p(x)w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\mathrm{e}^{\int_E w(x)\cdot\ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

(3) 设 $f\in L^\infty(E)$，$w(x)>0$ 且 $\int_E w(x)\mathrm{d}x=1$. 则

$$I=\lim_{p\to+\infty}\left(\int_E|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\|f\|_\infty.$$

证明 (1) 由 Jensen 不等式易知 $\ln\|f\|_p\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$. 另一方

面，根据 $\ln t\leqslant t-1(t>0)$，可知

$$\frac{1}{p}\ln\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}\left(\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x-1\right)=\int_0^1\frac{f^p(x)-1}{p}\mathrm{d}x.$$

注意，我们有

$$\lim_{p\to 0}\int_0^1 p^{-1}(f^p(x)-1)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x.$$

由此即可得证.

(2) 易知积分 $I=\int_E w(x)\cdot\ln f(x)\mathrm{d}x$ 有意义.

(i) 若 I 存在，则用不等式 $|(\mathrm{e}^{pt}-1)/p|\leqslant|t|+\mathrm{e}^{|t|}(t\in\mathbf{R}^1,0<p<1)$来证明

$$\lim_{p\to 0+}\int_E\frac{f^p(x)-1}{p}w(x)\mathrm{d}x=\int_E w(x)\cdot\ln f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 若 $I=-\infty$，则考查 $f_\delta(x)=\max\{f(x),\delta\}(0<\delta<1)$，在不等式

$$\left(\int_E w(x)\cdot f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_E w(x)\cdot f_\delta^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

两端令 $\delta\to 0+$.

(3) (i) 易知 $I\leqslant\|f\|_\infty$.

(ii) 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $e\subset E$：$m(e)>0$，使得

$$|f(x)|>\|f\|_\infty-\varepsilon\quad(x\in e).$$

从而可得

$$\left(\int_E|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\geqslant\left(\int_e|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$\geqslant(\|f\|_\infty-\varepsilon)\left(\int_e w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

由此又知(令 $p\to+\infty$)$I\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon$.

结合(i)，(ii)，即得所证.

例 17 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$是$(0,1]$上的非负可测函数，且对任意的 $\delta>0,f\in L^1((\delta,1])$. 若 $x^{p-1}f^p(x)$ $(p>1)$属于 $L^1((0,1])$，则

$$F(x)\triangleq\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t=o\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{1-\frac{1}{p}},\quad x\to 0^+.$$

(2) 设对任意的 $\varepsilon>0$，$f(x)$在$[\varepsilon,1]$上绝对连续，且有

$$\int_0^1 x|f'(x)|^p\mathrm{d}x<+\infty \quad (p>2),$$

则存在极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(3) 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)(p>1)$，$1/p+1/p'=1$，令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in\mathbf{R}^1$，则

$$|F(x+h)-F(x)|=o(|h|^{1/p'}),\quad h\to 0.$$

(4) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可微，若 $f\in L^2(\mathbf{R}^1)$，$f'\in L^2(\mathbf{R}^1)$，则 $f(x)\to 0$ $(x\to\infty)$.

证明 (1) 存在定义于$[0,1]$上的 $\varphi(x)$：$\varphi(x)\geqslant 1$，$\varphi(0^+)=\infty$，且 $\varphi(t)t^{p-1}f^p(t)$是可积的. 从而有$(q=p/(p-1))$

$$F(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_x^1(\varphi^{\frac{1}{p}}(x)t^{\frac{p-1}{p}}f(t))\varphi^{\frac{-1}{p}}(x)t^{\frac{1-p}{p}}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\left(\int_x^1\varphi^{-q/p}(x)t^{-1}\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_x^1 t^{p-1}\varphi(t)f^p(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

由此知 $F(x)\leqslant M\left(\int_x^1\varphi^{-q/p}(t)t^{-1}\mathrm{d}t\right)^{1/q}$. 对任给 $\varepsilon>0$，存在 x_0：$0<x_0<1$，使得 $\varphi^{-q/p}(x)<\varepsilon(0<x<x_0)$. 因此

$$\int_x^1\varphi^{-q/p}(t)t^{-1}\mathrm{d}t\leqslant 2\varepsilon\ln\frac{1}{x}.$$

(2) 用 Cauchy 列的方法. 易知存在常数 $C>0$，对 $0<x'<x''<1$，有

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant\int_{x'}^{x''}x^{-1/p}x^{1/p}|f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C(x')^{1-2/p}\left(\int_{x'}^{x''}x|f'(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

(3) 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p\quad (E\subset\mathbf{R}^1,m(E)<\delta).$$

从而当 $0<h<\delta$ 时，我们有$(1/p+1/p'=1)$

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant h^{1/p'} \cdot \left(\int_x^{x+h} |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} < \varepsilon h^{1/p'}.$$

(4) 由不等式$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$可知，$f' \in L([a,b])$. 由此得 $f\in \mathrm{AC}([a,b])$，自然 $f^2\in \mathrm{AC}([a,b])$. 从而我们有$\int_a^b (f^2(x))'\mathrm{d}x = f^2(b)-f^2(a)$. 此外又有

$$\int_a^b (f^2(x))'\mathrm{d}x \leqslant 2\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant 2\,\|f\|_2\,\|f'\|_2.$$

这说明 $\mathrm{d}(f^2(x))/\mathrm{d}x$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上可积. 根据 $f\in L^2(\mathbf{R}^1)$以及存在极限$\lim\limits_{b\to\infty} f^2(b)$，易得 $\lim\limits_{|b|\to+\infty} f^2(b)=0$.

例 18 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty)$. 令 $f_*(\lambda)=m(\{x:|f(x)|>\lambda\})$ $(\lambda>0)$，则

(i) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda^p f_*(\lambda)=0$；　　(ii) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda^p f_*(\lambda)=0$.

(2) 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)$ $(1\leqslant p<\infty)$，令 $f_h(x)=f(x+h)$. 若 $r>0, s>0$ 且 $r+s=p$，则

$$\lim_{|h|\to\infty} \|f_h^r \cdot f^s\|_1 = 0.$$

证明 (1) (i) 因为我们有(令 $E_\lambda=\{x\in\mathbf{R}^n: |f(x)|>\lambda\}$)

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_\lambda} |f(x)|^p\mathrm{d}x \geqslant \lambda^p f_*(\lambda),\quad f\in L^p(\mathbf{R}^n),$$

所以 $f_*(\lambda)\to 0(\lambda\to+\infty)$. 又由此知(积分绝对连续性)

$$\lambda^p f_*(\lambda) \leqslant \int_{E_\lambda} |f(x)|^p\mathrm{d}x \to 0\quad(\lambda\to+\infty).$$

(ii) 取 $\sigma>0, \lambda<\sigma$，我们有

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^p f_*(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\lambda^p[f_*(\lambda)-f_*(\sigma)]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\lambda^p m(\{x\in\mathbf{R}^n: \lambda<|f(x)|\leqslant\sigma\})$$

$$\leqslant \int_{\{x\in\mathbf{R}^n:\,|f(x)|\leqslant\sigma\}} |f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

由 σ 的任意性即得所证.

(2) 首先，由 $f_h^r \in L^{p/r}(\mathbf{R}^1)$，$f^s \in L^{p/s}(\mathbf{R}^1)$ $(r/p+s/p=1)$，可知 $f_h^r f^s \in L^1(\mathbf{R}^1)$. 其次，对任给 $\varepsilon>0$，取 N，记 $E=[-N,N]$，使得 $\int_{E^c}|f^p(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 因为对 $x\in E$，当 $|h|>2N$ 时，$x+h\overline{\in}E$，所以

$$\begin{aligned}\|f_h^r f^s\|_1 &= \int_E |f_h^r(x)f^s(x)|\mathrm{d}x + \int_{E^c}|f_h^r(x)f^s(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \left(\int_E |f_h(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{r/p}\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{s/p}\\ &\quad+\left(\int_{E^c}|f_h(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{r/p}\left(\int_{E^c}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{s/p}\\ &\leqslant \varepsilon^{r/p}\|f\|_p^s+\varepsilon^{s/p}\|f\|_p^r.\end{aligned}$$

由此即得所证.

例 19 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L^\infty(E)$，$m(E)<\infty$，且 $\|f\|_\infty>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}=\|f\|_\infty.$$

(2) 设 $m(E_k)>0$ $(k=1,2,\cdots)$，且 $m(E_k)\to 0$ $(k\to\infty)$，

$$g_k(x)=\chi_{E_k}(x)/m(E_k)^{1/q},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1,$$

则对 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}g_k(x)f(x)\mathrm{d}x=0$.

(3) 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上可测函数列，且有 $m(E)<+\infty$，以及

$$|f_n(x)|\leqslant M\ (x\in E,n\in\mathbf{N}),\quad \int_E|f_n(x)|^2\mathrm{d}x=1\ (n\in\mathbf{N}).$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_nf_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 (1) 令 $a_n=\|f\|_{n+1}^{n+1}$，$b_n=\|f\|_n^n$，则 $a_n\leqslant\|f\|_\infty b_n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_n}{b_n}\leqslant\|f\|_\infty$. 此外，又知 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_n}{b_n}\geqslant\|f\|_\infty$. 从而即可得证.

(2) 注意不等式

$$\int_{\mathbf{R}^n}|g_k(x)f(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{m(E_k)^{1/q}}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{m(E_k)^{1/q}} \cdot m(E_k)^{1/q}\left(\int_{E_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} = \left(\int_{E_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

(3) 由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nf_n(x)=0$, a. e. $x\in E$，故存在 $\delta>0$ 以及 $A\subset E$：$1-M^2\delta>0$，$m(E\setminus A)<\delta$，使得$\{a_nf_h(x)\}$在 A 上一致收敛于 0. 从而可得(记 $\varepsilon_n=\sup\limits_A\{a_nf_n(x)\}$)

$$|a_n|^2=\int_E|a_nf_n(x)|^2\mathrm{d}x=\int_A|a_nf_n(x)|^2\mathrm{d}x+\int_{E\setminus A}|a_nf_n(x)|^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\varepsilon_n\cdot m(A)+M^2|a_n|^2\delta.$$

由此知$|a_n|^2\leqslant\varepsilon_n^2m(A)/(1-M^2\delta)$，即可得证.

例 20 试证明下列命题：

(1) 设 $1\leqslant p<+\infty$，$f\in L^p(E)$，则

$$\|f\|_p=\sup\left\{\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|:\|g\|_q=1\right\},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

特别存在 $g\in L^q(E)$：$\|g\|_q=1$，使得$\|f\|_p=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $0<\alpha<1$，$\varphi(x)$是 E 上正值可测函数，则

$$\|f\|_\alpha=\inf\left\{\int_E\frac{|f(x)|}{\varphi(x)}\mathrm{d}x:\|\varphi\|_{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=1\right\}.$$

证明 (1) (i) 对 $1<p<+\infty$，因为

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\|f\|_p\|g\|_q=\|f\|_p,$$

所以只需指出：存在$\|g\|_q=1$，使得 $\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x=\|f\|_p$.

若 $f(x)\geqslant0$，令 $\lambda=\|f\|_p$，则 $\lambda^p=\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x$. 注意 $q(p-1)=p$，令 $g(x)=[f(x)/\lambda]^{p-1}$，我们有

$$\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x/\lambda^p=1,$$

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)[f(x)/\lambda]^{p-1}\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{p-1}\lambda^p=\lambda=\|f\|_p.$$

若 $f(x)$变号，则用 $g(x)=[|f(x)|/\lambda]^{p-1}\cdot\mathrm{sgn}\{f(x)\}$.

(ii) $p=1$，此时 $q=+\infty$. 令 $g(x)=\mathrm{sgn}\{f(x)\}$.

注 对 $f\in L^\infty(E)$，虽有$\|f\|_\infty=\sup\left\{\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x:\|g\|_1=1\right\}$，但不一定存

在 g: $\|g\|=1$,使得 $\|f\|_\infty=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

实际上,令 $M=\|f\|_\infty$,则对 $\varepsilon>0$,存在 $A\subset E$: $m(A)>0$,使得 $|f(x)|>M-\varepsilon$ $(x\in A)$. 令 $g(x)=\chi_A(x)\cdot\mathrm{sgn}\{f(x)\}/m(A)$,则 $\|g\|_1=\int_E\chi_A(x)\mathrm{d}x/m(A)=1$. 我们有

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\cdot\mathrm{sgn}\{f(x)\}\mathrm{d}x/m(A)$$

$$=\int_A|f(x)|\mathrm{d}x/m(A)>(M-\varepsilon)m(A)/m(A)=M-\varepsilon.$$

前一结论得证. 但是,设 $f(x)=x(0\leqslant x\leqslant 1)$,则 $\|f\|_\infty=1$,而当 $\|g\|_1=1$ 时,我们有

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1 x|g(x)|\mathrm{d}x<\int_0^1|g(x)|\mathrm{d}x=1.$$

从而后一结论也得证.

(2) (i) 因为

$$\int_E|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f(x)|\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x\right)^\alpha\left(\int_E\varphi(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mathrm{d}x\right)^{1-\alpha},$$

所以

$$\left(\int_E|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x\right)^{1/\alpha}\leqslant\inf\left\{\int_E|f(x)|\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x:\ \|\varphi\|_{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=1\right\}.$$

(ii) 设 $\lambda=\int_E|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x\neq 0$,令 $\varphi(x)=|f(x)|^{1-\alpha}\cdot\lambda^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$,则

$$\int_E\varphi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x)\mathrm{d}x=\int_E f^\alpha(x)\lambda^{-1}\mathrm{d}x=1,$$

$$\left|\int_E|f(x)|\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x\right|^\alpha=\left(\int_E|f(x)|\,|f(x)|^{\alpha-1}\cdot\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\mathrm{d}x\right)^\alpha$$

$$=\left(\int_E|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x\right)^\alpha\lambda^{1-\alpha}=\lambda=\int_E|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x.$$

例 21 设 $K(x,y)$是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上的可测函数,且有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\mathrm{d}y\leqslant M,\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^n;$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant M,\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^n,$$

令 $Tf(x)=\int_{\mathbf{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y(f\in L^p(\mathbf{R}^n),1\leqslant p\leqslant+\infty)$,试证明 $Tf\in L^p(\mathbf{R}^n)$,且 $\|Tf\|_p\leqslant C\,\|f\|_p(f\in L^p(\mathbf{R}^n))$.

证明 对 $p=+\infty$,我们有

$$|Tf(x)|\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)||f(y)|\mathrm{d}y\leqslant\|f\|_\infty\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant M\|f\|_\infty,\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^n.$$

由此知$\|Tf\|_\infty\leqslant M\|f\|_\infty$.

对 $1\leqslant p<+\infty$,作 q: $1/p+1/q=1$,则

$$|Tf(x)|\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\mathrm{d}y\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)||f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}$$
$$\leqslant M^{1/q}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)||f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

应用 Fubini 定理交换积分次序,可得

$$\int_{\mathbf{R}^n}|Tf(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant M^{p/q}\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)||f(y)|^p\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$=M^{p/q}\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)|^p\left(\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\leqslant M^{p/q+1}\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)|^p\mathrm{d}y.$$

由此即知 $\|Tf\|_p\leqslant C\|f\|_p$.

§6.2 L^p 空间的结构

基本内容

(一) $L^p(E)$是完备的距离空间

为了便于在 $L^p(E)$中引进距离,我们对 $L^p(E)$空间的概念稍作一些改变,即认定当 $f,g\in L^p(E)$,且 $f(x)=g(x)$, a.e. $x\in E$ 时,f 与 g 是 $L^p(E)$中的同一个元,或说用几乎处处相等作为等价关系把 $L^p(E)$中的元分成等价类.例如在 E 上几乎处处等于零的函数全体是 $L^p(E)$中的零元,于是我们有下述定理:

定理 1 对于 $f,g\in L^p(E)$,定义

$$d(f,g)=\|f-g\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

则$(L^p(E),d)$是一个距离空间.仍记为$L^p(E)$.

定义 1 设 $f_k\in L^p(E)$ $(k=1,2,\cdots)$.若存在 $f\in L^p(E)$,使得

$$\lim_{k\to\infty}d(f_k,f)=\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0,$$

则称$\{f_k\}$依 $L^p(E)$的意义**收敛**于 f,$\{f_k\}$为 $L^p(E)$中的**收敛列**,f 为$\{f_k\}$在 $L^p(E)$中的**极限**.

我们有下列简单事实：

(i) 唯一性. 若 $\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$, $\lim_{k\to\infty}\|f_k-g\|_p=0$, 则 $f(x)=g(x)$, a. e. $x\in E$；

(ii) 若 $\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$, 则 $\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p$.

定义 2 设 $\{f_k\}\subset L^p(E)$. 若 $\lim_{k,j\to\infty}\|f_k-f_j\|_p=0$, 则称 $\{f_k\}$ 是 $L^p(E)$ 中的**基本（或 Cauchy）列**.

显然，由于 $\|f_k-f_j\|_p\leqslant\|f_k-f\|_p+\|f_j-f\|_p$, 故知收敛列定为 Cauchy 列. 下述定理表明 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 列定为收敛列，这一事实称为空间 $L^p(E)$ 的完备性.

定理 2 $L^p(E)$ 是完备的距离空间.

（二）$L^p(E)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 是可分空间

定义 3 设 Γ 是 $L^p(E)$ 中的子集，若对任意的 $f\in L^p(E)$ 以及 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in\Gamma$, 使得 $\|f-g\|_p<\varepsilon$, 则称 Γ 在 $L^p(E)$ 中**稠密**；若 $L^p(E)$ 中存在稠密且其元素是可数的子集，则称 $L^p(E)$ 是**可分的**.

引理 设 $f\in L^p(E)$ $(1\leqslant p<\infty)$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 我们有

(i) 存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$, 使得

$$\int_E|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon;$$

(ii) 存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的阶梯函数 φ: $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{I_i}(x)$（每个 I_i 都是二进方体），使得 $\int_E|f(x)-\varphi(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon$.

定理 3 $L^p(E)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 是可分空间.

推论 若 $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant r\leqslant\infty$, 则 $L^p(E)\cap L^r(E)$ 在 $L^p(E)$ 中稠密.

定理 4 若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty)$, 则有

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+t)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0.$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上可测函数列，$F\in L^p(E)$ $(p\geqslant 1)$. 若有

$$|f_k(x)|\leqslant F(x)\ (k\in\mathbf{N}),\quad \lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\ \text{a. e. } x\in E,$$

则 $\|f_k-f\|_p\to 0$ $(k\to\infty)$.

(2) 设 $f_n \in L^p(\mathbf{R}^1)$ $(1<p<\infty)$且 $f_n(x) \geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ 当且仅当 $\|f_n^p - f^p\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$.

(3) 在 $L^p([0,1])$的各等价类中，

(i) 每个类中至多含有一个连续函数；

(ii) 存在不含有连续函数的类.

证明 (1) 注意 $|f_k(x)-f(x)|^p \leqslant (|f_k(x)|+|f(x)|)^p \leqslant 2^p|F(x)|^p$.

(2) **必要性** 记 $\underline{f}_n(x)=\min_{\mathbf{R}^1}\{f_n(x),f(x)\}$，$\overline{f}_n(x)=\max_{\mathbf{R}^1}\{f_n(x), f(x)\}$，则由 $\|\overline{f}_n-f\|_p \to 0$ $(n\to\infty)$以及 $\overline{f}_n^p(x)+\underline{f}_n^p(x)=f_n^p(x)+f^p(x)$可知

$$\|\overline{f}_n\|_p \to \|f\|_p, \quad \|\underline{f}_n\|_p \to \|f\|_p \quad (n \to \infty).$$

从而得 $\|f_n^p-f^p\|_1=\|\overline{f}_n^p-\underline{f}_n^p\|_1=\|\overline{f}_n\|_p^p-\|\underline{f}_n\|_p^p \to 0$ $(n\to\infty)$.

充分性 首先，依题设知 $f_n(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 其次，由

$$\left|\int[f_n^p(x)-f^p(x)]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int|f_n^p(x)-f^p(x)|\mathrm{d}x$$

可知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $m(e)<\delta$，$n>N_1$ 时，有

$$\int_e f^p(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^p}{2}, \quad \int_e f_n^p(x)\mathrm{d}x < \varepsilon^p.$$

此外，还存在 $E\subset\mathbf{R}^1$，$m(E)<+\infty$，使得当 $n>N_1$ 时，有

$$\int_{E^c} f^p(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^p}{2}, \quad \int_{E^c} f_n^p(x)\mathrm{d}x < \varepsilon^p.$$

现在取 $\sigma=\varepsilon/m(E)^{1/p}$，以及 $N>N_1$，使得 $n>N$ 时，有

$$m(\{x\in\mathbf{R}^1: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})<\delta.$$

考查

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_p \leqslant & \left(\int_{\{x:\ |f_n-f|\geqslant\sigma\}}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ & + \left(\int_{E\cap\{x:\ |f_n-f|<\sigma\}}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ & + \left(\int_{E^c}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$\leqslant\left(\int_{\{x:\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}}|f_n(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$+\left(\int_{\{x:\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$+\left(\int_{E\cap\{x:\,|f_n(x)-f(x)|<\sigma\}}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$+\left(\int_{E^c}|f_n(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_{E^c}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$<4\varepsilon+(\sigma^p\cdot m(E))^{1/p}=5\varepsilon\quad(n>N).$$

(3) (i) 显然.

(ii) 对 $\delta\in(0,1)$,作类 Cantor 集 $C_\delta\subset[0,1]$: $m(C_\delta)=\delta$,则对包含 $\chi_{C_\delta}(x)$的某等价类 $\mathscr{A}$,如果存在 $f\in\mathscr{A}\cap C([0,1])$,那么必有 $f(x)=0$,a.e. $x\in[0,1]\setminus G_\delta$. 然而$[0,1]\setminus C_\delta$ 在$[0,1]$中稠密,故得 $f(x)\equiv0$,这与 $\chi_{C_\delta}(x)\neq0$,a.e. $x\in[0,1]$矛盾.

例 2 试证明下列命题:

(1) 设 $1\leqslant p<\infty$,$f\in L^p(E)$,$f_k\in L^p(E)$ $(k=1,2,\cdots)$,且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,a.e. $x\in E$,$\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p$. 则

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0.$$

(2) 设 $f_k(x)\to f(x)$ $(k\to\infty,x\in E)$,$m(E)<\infty$且有

$$\int_E|f_k(x)|^r\mathrm{d}x\leqslant M^r\quad(k=1,2,\cdots),\quad 0<r<\infty.$$

则对 p: $0<p<r$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0$. (注意,对 $m(E)=\infty$或 $p=r$ 皆不真)

(3) 设$\|f_k\|_3\leqslant M(k\in\mathbf{N})$,且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{3/2}=0$,则

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_2=0.$$

(4) 设 $1\leqslant q<p<\infty$,$m(E)<\infty$. 若有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0$,则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|^q\mathrm{d}x=0.$$

证明 （1）应用不等式$|a-b|^p\leqslant 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$，可得

$$2^{p-1}(|f_k(x)|^p+|f(x)|^p)-|f_k(x)-f(x)|^p\geqslant 0\quad (x\in E).$$

因为我们有

$$\begin{aligned}2^p\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x&=\int_E\lim_{k\to\infty}[2^{p-1}(|f_k(x)|^p+|f(x)|^p)\\&\qquad-|f_k(x)-f(x)|^p]\mathrm{d}x\\&\leqslant 2^{p-1}\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x+2^{p-1}\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)|^p\mathrm{d}x\\&\quad+\varliminf_{k\to\infty}\int_E-|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\\&=2^p\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以得出

$$0\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|^p\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

（2）由题设知$\|f\|_r\leqslant M$. 取q：$p/r+1/q=1$，并对任给$\varepsilon>0$，作$e\subset E$：$m(e)<[\varepsilon/(2M)^p]^q$，使得$f_n(x)$在$E\setminus e$上一致收敛于$f(x)$：

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E\setminus e}|f_k(x)-f(x)|^r=0.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\int_e|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x&\leqslant\left(\int_e|f_k(x)-f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{p/r}\cdot\left(\int_e 1\mathrm{d}x\right)^{1/q}\\&\leqslant(2M)^p\cdot m(e)^{1/q}<\varepsilon.\end{aligned}$$

综合上述结果，即可证得$\|f_k-f\|_p\to 0(k\to\infty)$.

注 对$p=r$，上述命题不真，例如$f_k(x)=\sqrt[r]{k}\ (0<x<1/k)$；$f_k(x)=0$（其他$x$值），$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)=0(0<x<1)$，$\|f_k\|_r=1$，但$f_k(x)$不是以$L^r([0,1])$意义下收敛于$f(x)$.

对$m(E)=+\infty$，上述命题也不真. 例如

$$f_k(x)=\begin{cases}1, & k<x\leqslant k+1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f(x)\equiv 0,$$

则$f_k(x)\to f(x)\ (k\to\infty, x\in(0,\infty))$，且有$\|f_k\|_2\leqslant M$，但是$f_k(x)$不是以$L^1((0,\infty))$意义收敛于$f(x)$.

（3）注意不等式

$$\|f_k - f\|_2^2 = \int_E |f_k(x) - f(x)||f_k(x) + f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_E |f_k(x) - f(x)|^{3/2}\mathrm{d}x\right)^{2/3}\left(\int_E |f_k(x) - f(x)|^3\mathrm{d}x\right)^{1/3}$$

$$\leqslant \|f_k - f\|_{3/2}(\|f_k\|_3 + \|f\|_3) \leqslant 2M\|f_k - f\|_{3/2}.$$

(4) 注意不等式(设 p'：$1/p'+q/p=1$)

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f_k(x) - f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{q/p}(m(E))^{\frac{p-q}{p}}.$$

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $f_k \in L^1(E)\cap L^\infty(E)$ $(k=1,2,\cdots)$，$f\in L^1(E)$. 若 $M=\sup\limits_{k\geqslant 1}\{\|f_k\|_\infty\}<\infty$，且 $\|f_k-f\|_1\to 0$ $(k\to\infty)$，则

$$\|f_k-f\|_p\to 0 \quad (k\to\infty, p>1).$$

(2) 设 $f\in L^p([a,b])$，$f_k\in L^p([a,b])$ $(k\in\mathbf{N}, p\geqslant 1)$. 若有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^x f_k(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

(3) 设 $f_k\in L^p(E)$，$m(E)<+\infty$，且 $M=\sup\limits_{k\geqslant 1}\{\|f_k\|_p\}<+\infty$. 若 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，则

$$\|f_k - f\|_r \to 0 \quad (k\to\infty, 1\leqslant r<p).$$

(4) 设 $f_k\in L^p(E)$ $(k\in\mathbf{N}, 1\leqslant p<+\infty)$，$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$，a. e. $x\in E$，则下述命题等价：

(i) $f\in L^p(E)$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$.

(ii) 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $e_1\subset E$：$m(e_1)<+\infty$，以及 $\delta>0$，使得

$$\int_{E\setminus e_1}|f_k(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon \quad (k\in\mathbf{N});$$

$$\int_{e_2}|f_k(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon \quad (k\in\mathbf{N}, e\subset E: m(e_2)<\delta).$$

证明 (1) 由题设知存在 $\{f_{k_i}(x)\}$：$\lim\limits_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x)$，a. e. $x\in E$. 故根据 $|f_{k_i}(x)|\leqslant\|f_{k_i}\|_\infty\leqslant M$ $(i\in\mathbf{N}.$ a. e. $x\in E)$，可知 $|f(x)|\leqslant M$，a. e. $x\in E$. 由此即得 $\|f\|_\infty\leqslant M$. 从而我们有

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_E |f_k(x) - f(x)| |f_k(x) - f(x)|^{p-1} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_E |f_k(x) - f(x)| \cdot (|f_k(x)| + |f(x)|)^{p-1} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_E |f_k(x) - f(x)| (\|f_k\|_\infty + \|f\|_\infty)^{p-1} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant (2M)^{p-1} \int_E |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x.$$

即可得证.

(2) 注意不等式($p>1$)

$$\int_a^x |f_k(t) - f(t)| \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f_k(t) - f(t)| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |f_k(t) - f(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} \cdot (b - a)^{\frac{p}{p-1}}.$$

(3) 由题设知存在$\{f_{k_i}(x)\}$,使得 $\lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x)$,a. e. $x \in E$. 故由

$$\left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} = \left(\int_E \lim_{i\to\infty} |f_{k_i}(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \left(\int_E |f_{k_i}(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

可知$\|f\|_p \leqslant M$. 由题设又可知,对任给 $\varepsilon>0$,$\sigma>0$,存在 K,使得

$$m(E_k) < \varepsilon \ (k \geqslant K), \quad E_k = \{x \in E:\ |f_k(x) - f(x)| > \sigma\}.$$

从而我们有($k \geqslant K$)

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^r \mathrm{d}x = \left\{ \int_{E_k} + \int_{E \setminus E_k} \right\} |f_k(x) - f(x)|^r \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_{E_k} |f_k(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{r/p} (m(E_k))^{\frac{p-r}{p}} + \sigma^r \cdot m(E)$$

$$\leqslant \|f_k - f\|_p^r (m(E_k))^{\frac{p-r}{p}} + \sigma^r \cdot m(E)$$

$$\leqslant (2M)^r \varepsilon^{\frac{p-r}{p}} + \sigma^r m(E).$$

由此即可得证.

(4) (i)⇒(ii) 注意,对任给 $\varepsilon>0$,以及可测集 $A \subset E$,存在 N,使得

$$\int_A |f_k(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_A |f(x)|^p + \varepsilon \quad (k \geqslant N).$$

(ii)⇒(i) 由题设可推,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$\int_{E\setminus e_1}|f(x)|^p<\varepsilon,\quad \int_{e_2}|f(x)|^p<\varepsilon\quad (m(e_2)<\delta,m(e_1)<+\infty).$$

从而可得

$$\int_{E\setminus e_1}|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant 2^p\int_{E\setminus e_1}|f_k(x)|^p\mathrm{d}x+2^p\int_{E\setminus e_1}|f(x)|^p\mathrm{d}x<2^{p+1}\varepsilon.$$

再由 $f_k(x)$ 在 e_1 上依测度收敛于 $f(x)$,若令 $e_1'=\{x\in e_1: |f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$,则存在 n_0,使得 $m(e_1')<\delta(k\geqslant n_0)$. 从而又可得

$$\int_{e_1}|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=\left\{\int_{e_1'}+\int_{e_1\setminus e_1'}\right\}|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C_1\varepsilon.$$

综合上述结果,我们有 $\|f_k-f\|_p\leqslant C_2\varepsilon$.

例 4 设 $f_n\in C^{(1)}([0,1])$, $\|f_n'\|_\infty\leqslant 1$ $(n\in\mathbf{N})$. 若对一切 $g\in C([0,1])$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=0$,试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_\infty=0$.

证明 反证法. 假定结论不真,则存在 $\delta>0$ 以及$[0,1]$中的 x_0, $\{x_n\}$,使得$f_n(x_n)\geqslant\delta$, $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 因为 $\|f_n'\|_\infty\leqslant 1$,所以 $|f_n(x)-f_n(x_0)|\leqslant|x-x_0|$ $(x_0,x\in[0,1])$. 从而由题设知,存在 N,使得

$$f_n(x)\geqslant\delta/4\quad (n\geqslant N,x_0-\delta/4\leqslant x\leqslant x_0+\delta/4).$$

作$[0,1]$上逐段线性函数 $g(x)$如下:

$$g(x)=\begin{cases}1, & x_0-\delta/4\leqslant x\leqslant x_0+\delta/4,\\ 0, & x\,\overline{\in}\,[x_0-\delta/4,x_0+\delta/4],\end{cases}$$

则当 $n\geqslant N$ 时,有

$$\int_0^1 f_n(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\delta^2}{16}.$$

这导致矛盾,证毕.

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $f_k\in L^1(E)(k\in\mathbf{N})$, $m(E)<+\infty$ 且 $M=\sup\limits_{k\geqslant 1}\{\|f_k\|_1\}<+\infty$. 若 $f_k(x)$在 E 上依测度收敛于 0,则对 $g\in L^1(E)$有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\sqrt{|f_k(x)g(x)|}\mathrm{d}x=0.$$

(2) 设 $E_n\subset\mathbf{R}^1$, $0<m(E_n)<+\infty(n\in\mathbf{N})$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n)=0$,又令

$g_n(x) = (m(E_n))^{-1/q}\chi_{E_n}(x)(n \in \mathbf{N})$, $1 < p < +\infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,
则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1} f(x)g_n(x)\mathrm{d}x = 0 (f \in L^p(\mathbf{R}^1))$.

(3) 设 $1<p<\infty, f_n \in L^p(\mathbf{R}^1), \|f_n\|_p \leqslant M\ (n \in \mathbf{N}), f \in L^p(\mathbf{R}^1)$，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x \in \mathbf{R}^1,$$

则对任意的 $g \in L^q(\mathbf{R}^1), 1/p+1/q=1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1} f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^1} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $\|f_n - f\|_r \to 0, \|g_n - g\|_r \to 0 (n\to\infty, r \geqslant 0)$，则

$$\|f_n g_n - fg\|_{r/2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

证明 (1) 对任给 $\varepsilon>0$，由题设易知，存在 $\delta>0$，当 $e \subset E$ 且 $m(e) < \delta$ 时，有 $\int_e |g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$. 令 $E_k(\varepsilon) = \{x \in E: |f_k(x)| > \varepsilon\}$，则由题设又知，存在 N，当 $k>N$ 时，$m(E_k(\varepsilon)) < \delta$. 从而对 $k>N$，我们有

$$\begin{aligned}\int_E \sqrt{|f_k(x)g(x)|}\mathrm{d}x &= \left\{\int_{E_k(\varepsilon)} + \int_{E\setminus E_k(\varepsilon)}\right\}\sqrt{|f_k(x)g(x)|}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{E_k(\varepsilon)} |f_k(x)|\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{E_k(\varepsilon)} |g(x)|\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{E\setminus E_k(\varepsilon)} |f_k(x)|\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{E\setminus E_k(\varepsilon)} |g(x)|\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &< \|f_k\|_1^{1/2}\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\cdot m(E)\cdot \|g\|_1^{1/2}.\end{aligned}$$

由此即可得证.

(2) 只需注意不等式

$$\int_{\mathbf{R}^1} f(x)g_n(x)\mathrm{d}x = (m(E_n))^{-1/q}\int_{E_n} |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{E_n} |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

(3) 根据题设易知，若 $h(x)$ 是阶梯函数，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1} f_n(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^1} f(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

现在对 $g \in L^q(\mathbf{R}^1)$ 以及 $\varepsilon>0$，作阶梯函数 $h(x)$，使得

$$\|g-h\|_q=\left(\int_{\mathbf{R}^1}|g(x)-h(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}<\frac{\varepsilon}{2M},$$

并考查

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbf{R}^1}f_n(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^1}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\\&\quad\leqslant\int_{\mathbf{R}^1}|f_n(x)||g(x)-h(x)|\mathrm{d}x\\&\qquad+\left|\int_{\mathbf{R}^1}[f_n(x)h(x)-f(x)h(x)]\mathrm{d}x\right|\\&\qquad+\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)||h(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\|f_n\|_p\|g-h\|_q+\left|\int_{\mathbf{R}^1}[f_n(x)h(x)-f(x)h(x)]\mathrm{d}x\right|\\&\qquad+\|f\|_p\|g-h\|_q.\end{aligned}$$

由此易知结论成立.

(4) 由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_r=\|f\|_r$. 因为我们有

$$\begin{aligned}&\int_E|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|^{r/2}\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\int_E|f_n(x)[g_n(x)-g(x)]+g(x)[f_n(x)-f(x)]|^{r/2}\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant2^{r/2}\left\{\int_E|f_n(x)[g_n(x)-g(x)]|^{r/2}\mathrm{d}x\right.\\&\qquad\left.+\int_E|g(x)[f_n(x)-f(x)]|^{r/2}\mathrm{d}x\right\}\\&\quad\leqslant2^{r/2}\left\{\left(\int_E|f_n(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_E|g_n(x)-g(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right.\\&\qquad\left.+\left(\int_E|g(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_E|f_n(x)-f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right\},\end{aligned}$$

所以令 $n\to\infty$ 即可得证.

例 6 试证明下列命题:

(1) 设 $\|f_k-f\|_p\to0$, $\|g_k-g\|_q\to0$, $p>1$ 且 $1/p+1/q=1$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\mathrm{d}x=0.$$

(2) 设在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上有 $\|f_k-f\|_1\to0$，$\|g_k-g\|_1\to0$ $(k\to\infty)$. 若 $f_k\in L^\infty(E)$，$\|f_k\|_\infty\leqslant M$ $(k=1,2,\cdots)$，则

$$\|f_kg_k-fg\|_1\to0\quad(k\to\infty).$$

(3) 设 $1<p<\infty$，$f_k\in L^p(E)$ $(k=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\qquad\sup_{1<k<\infty}\|f_k\|_p\leqslant M.$$

则对任意的 $g\in L^{p'}(E)$（p' 是 p 的共轭指标），有（弱收敛）

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$1\leqslant p<\infty$，$\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$，$\{g_k(x)\}$ 是 E 上一致有界的可测函数列，且 $g_k(x)\to g(x)$ $(x\in E,k\to\infty)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k\cdot g_k-f\cdot g\|_p=0.$$

证明 (1) 因为我们有等式

$$\begin{aligned}f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)&=[f_k(x)-f(x)][g_k(x)-g(x)]\\&\quad+f(x)[g_k(x)-g(x)]+g(x)[f_k(x)-f(x)],\end{aligned}$$

所以得到

$$\begin{aligned}&\int_E|f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\int_E|f_k(x)-f(x)||g_k(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&\qquad+\int_E|f(x)||g_k(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&\qquad+\int_E|g(x)||f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\|f_k-f\|_p\|g_k-g\|_q+\|f\|_p\|g_k-g\|_q+\|g\|_q\|f_k-f\|_p.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$ 即得所证.

(2) 易知 $\|f\|_\infty\leqslant M$，且 $f_k\cdot g_k\in L(E)(k\in\mathbf{N})$，$fg\in L(E)$. 对任给 $\varepsilon>0$，$\sigma>0$，由题设知存在 $\delta>0$ 以及 N，使得（$e\subset E$，$e_k(\sigma)=\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\sigma\}$）

$$\int_e|g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon\quad(m(e)<\delta),$$

$$m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\sigma\})<\delta\quad(k\geqslant N),$$

$$\int_{E_N} |g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon \quad (E_N = \{x \in E: |x| > N).$$

从而我们有

$$\int_{E_N} |f_k(x)g(x) - f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2M\int_{E_N} |g(x)|\mathrm{d}x < 2M\varepsilon,$$

$$\int_{E\setminus E_N} |f_k(x)g(x) - f(x)g(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \left\{\int_{A_N(\sigma)} + \int_{B_N(\sigma)}\right\} |f_k(x) - f(x)||g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2M\int_{A_N(\sigma)} |g(x)| + \sigma \cdot \int_{B_N(\sigma)} |g(x)|\mathrm{d}x < 2M\varepsilon + \sigma \|g\|_1$$

$$(A_N(\sigma) = (E\setminus E_N)\cap e_k(\sigma), \quad B_N(\sigma) = (E\setminus E_N)\setminus e_k(\sigma)).$$

由此即可得 $\|f_kg - fg\|_1 \to 0\ (k\to\infty)$. 注意到 $\|f_kg - f_kg_k\|_1 \leqslant M\|g-g_k\|_1$，最后导致

$$\|f_kg_k - fg\|_1 \leqslant \|f_kg_k - f_kg\|_1 + \|f_kg - fg\|_1 \to 0 \quad (k\to\infty).$$

(3) 由题设知 $\|f\|_p \leqslant M$. 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 以及 N，使得当 $e\subset E$ 且 $m(e)<\delta$ 时，有 $\int_e |g(x)|^{p'}\mathrm{d}x<\varepsilon$，且有 $\int_{E_N} |g(x)|^{p'}\mathrm{d}x<\varepsilon$ ($E_N=\{x\in E: |x|>N\}$). 根据 Егоров 定理我们可知，存在 $A\subset E\setminus E_N$: $m((E\setminus E_N)\setminus A)<\delta$，使得 $f_k(x)$ 在 A 上一致收敛于 $f(x)$. 从而知存在 N_1，使得

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/m(A) \quad (k\geqslant N_1, x\in A).$$

由此又得 $\int_A |f_k(x) - f(x)|^p\mathrm{d}x < (\varepsilon^p/m(A))m(A) = \varepsilon^p$. 于是对 $k\geqslant \max\{N, N_1\}$，就有

$$\left|\int_E f_k(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f_k(x) - f(x)||g(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \left\{\int_{E_N} + \int_{(E\setminus E_N)\setminus A} + \int_A\right\} |f_k(x) - f(x)||g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \|f_k - f\|_p \left(\int_{E_N} |g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}$$

$$+\|f_k-f\|_p\left(\int_{(E\setminus E_N)\setminus A}|g(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}$$

$$+\left(\int_A|f_k(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\|g\|_{p'}$$

$$<2M\cdot\varepsilon^{1/p'}+2M\varepsilon^{1/p'}+\varepsilon\|g\|_{p'}.$$

这说明命题成立.

(4) (i) 对任给 $\varepsilon>0$,存在 N 以及 $\delta>0$,使得当 $e\subset E$: $m(e)<\delta$,有 $\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon$,以及($E_N=\{x\in E: |x|>N\}$)

$$\int_{E_N}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon,\quad \|f_k-f\|_p<\varepsilon\quad(k>N).$$

设 $|g_k(x)|\leqslant M(k\in\mathbf{N},x\in E)$,$e_k(\varepsilon)=\{x\in E\setminus E_N: |g_k(x)-g(x)|\geqslant\varepsilon\}$,则易知存在 N_1,使得 $m(e_k(\varepsilon))<\delta(k>N_1)$.

(ii) 估计不等式

$$\|f_kg_k-fg\|_p\leqslant\|g_k(f_k-f)\|_p+\|(g_k-g)f\|_p,$$

我们有

$$\|g_k(f_k-f)\|_p\leqslant M\|f_k-f\|_p<M\varepsilon\quad(k>N),$$

$$\|(g_k-g)f\|_p^p=\int_E|f(x)|^p|g_k(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$=\left\{\int_{E_N}+\int_{(E\setminus E_N)\setminus e_k(\varepsilon)}+\int_{e_k(\varepsilon)}\right\}|f(x)|^p|g_k(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant(2M)^p\int_{E_N}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\varepsilon^p\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$+(2M)^p\int_{e_k(\varepsilon)}|f(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$<(2M)^p\varepsilon+\varepsilon^p\|f\|_p^p+(2M)^p\cdot\varepsilon.$$

由此即得所证.

例 7 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^p(E)$,$f_k\in L^p(E)$ $(k=1,2,\cdots)$. 若 $\|f_k-f\|_p<4^{-k/p}(k=1,2,\cdots)$,则对任给 $\delta>0$,存在 $E_\delta\subset E$,$m(E_\delta)<\delta$,使得 $f_k(x)$ 在 $E\setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(2) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上非负可测函数,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\mathbf{R}^1$ 上非负可测函数 $g(x)$,使得

(i) $\|f-g\|_\infty<\varepsilon$; (ii) $m(\{x\in\mathbf{R}^1: g(x)=r\})=0\ (r\in\mathbf{R}^1)$.

(3) 设 $\mathscr{A}=\left\{f\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1): \sup\limits_{x\in\mathbf{R}^1}\{|f(x)|\}<+\infty, \int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x=0\right\}$,则 $\mathscr{A}$ 在 $L^p(\mathbf{R}^1)(1<p<\infty)$中稠密.

(4) 设 $1<p<+\infty$,令 $\Gamma=\left\{f\in L^1([0,1]): \int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1, \int_0^1|f(x)|^p\mathrm{d}x=2\right\}$,则对 ε: $0<\varepsilon<1$,存在 $\delta>0$,使得

$$m(\{x\in[0,1]: |f(x)|>\varepsilon\})\geqslant\delta \quad (f\in\Gamma).$$

证明 (1) 令 $A_k=\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|^p>2^{-k}\}(k\in\mathbf{N})$,则 $2^{-k}m(A_k)\leqslant\|f_k-f\|_p^p<4^{-k}$, $m(A_k)<2^{-k}$. 由此可知 $f_k(x)$在 $E\setminus\left(\bigcup\limits_{k>i}A_k\right)\triangleq B_i^c$ 上一致收敛于 $f(x)$. 因此我们有

$$m(B_i)\leqslant\sum_{k>i}m(A_k)\leqslant\sum_{k>i}2^{-k}=2^{-i}\to 0 \quad (i\to\infty).$$

从而易知结论成立.

(2) (i) 设$\{r_n\}$: $0<r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots, r_n\to+\infty(n\to\infty)$,且有 $r_{n+1}-r_n<\varepsilon$. 再作 $f_1(x)=f(x)+\arctan x$,且记

$$g_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}r_n\chi_{E_n}(x),$$

其中 $$E_n=\{x\in\mathbf{R}^1: r_{n-1}<f_1(x)\leqslant r_n\} \quad (n\in\mathbf{N}),$$

可得 $g_1(x)\geqslant\arctan x$, $\|f_1-g_1\|_\infty<\varepsilon$. 又令 $g(x)=g_1(x)-\arctan x$,则

$$g(x)\geqslant 0, \quad \|f-g\|=\|f_1-g_1\|_\infty<\varepsilon.$$

(ii) 因为我们有

$$\{x\in\mathbf{R}^1: g(x)=r\}=\{x\in\mathbf{R}^1: g_1(x)-\arctan x=r\}$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in E_n: \arctan x=r_n-r\},$$

$$m(\{x\in E_n: \arctan x=r_n-r\})=0 \quad (n\in\mathbf{N}),$$

所以 $$m(\{x\in\mathbf{R}^1: g(x)=r\})=0.$$

(3) (i) 对任给 $\varepsilon>0, h>0$,以及 $n\in\mathbf{N}$,可作 $\varphi\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$,使得

$\varphi(x)$的支集是紧集且包含于$[n,\infty)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant h(x\in\mathbf{R}^1)$，$\int_{\mathbf{R}^1}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，$\|\varphi\|_p<\varepsilon$.

实际上，存在 $f\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$，且对 $k\in\mathbf{N}$，有

$$\operatorname{supp}f\subset[n,n+k+2],\quad 0\leqslant f(x)\leqslant 1\quad(x\in\mathbf{R}^1),$$
$$f(x)=1\quad(n+1\leqslant x\leqslant n+k+1).$$

设 $l=\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x>0$，则取 $\varphi(x)=f(x)/l$. 从而有

$$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\frac{1}{k}\quad\left(l=\int_{\mathbf{R}^1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{n+1}^{n+k+1}\mathrm{d}x=k\right),$$

$$\|\varphi\|_p\leqslant\left(\int_n^{n+k+2}\left(\frac{1}{k}\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\left(\frac{k+2}{k}\right)^{1/p}\cdot k^{1/p-1}\to 0\quad(k\to\infty).$$

因此取 k 充分大，$\varphi(x)$就满足要求.

(ii) 已知对 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)$以及 $\varepsilon>0$，存在 $g\in C_C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$，使得$\|f-g\|_p<\varepsilon$. 若 $\int_{\mathbf{R}^1}g(x)\mathrm{d}x=0$，则命题已成立. 现在设 $\int_{\mathbf{R}^1}g(x)\mathrm{d}x=m\neq 0$，我们取 n，使得$\operatorname{supp}g\cap[n,\infty)=\varnothing$，并且选取 $\varphi\in C_C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$满足

(A) $\operatorname{supp}\varphi\subset[n,\infty)$；　　(B) $\varphi(x)\geqslant 0(x\in\mathbf{R}^1)$；

(C) $\int_{\mathbf{R}^1}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$；　　(D) $\|\varphi\|_p<\varepsilon/|m|$.

转而考查 $\psi(x)=g(x)-m\varphi(x)$，显然 $\psi\in\mathscr{A}$，且有

$$\begin{aligned}\|f-\psi\|_p&=\|(f-g)-m\varphi\|_p\\&\leqslant\|f-g\|_p+|m|\ \|\varphi\|_p<\varepsilon+m\ \|\varphi\|_p<2\varepsilon.\end{aligned}$$

注　$\mathscr{A}$ 并不在 $L^1(\mathbf{R}^1)$中稠密，例如 $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$. 此时，若有 $\varphi\in L^1(\mathbf{R}^1)$且$\|f-\varphi\|_1<1/2$，则

$$1-\int_{\mathbf{R}^1}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^1}[f(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{1}{2}.$$

由此推出 $\int_{\mathbf{R}^1}\varphi(x)\mathrm{d}x>1-1/2=1/2$，故 $\varphi\overline{\in}\mathscr{A}$.

(4) 对 $f\in\Gamma$，令 $A=\{x\in[0,1]:|f(x)|>\varepsilon\}$，$B=[0,1]\setminus A$，易知

$$\int_B|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\cdot m(B)\leqslant\varepsilon,$$

$$\int_A|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x-\int_B|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant 1-\varepsilon.$$

记 q：$1/p+1/q=1$，则可得

$$\int_A |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_A |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_A 1\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_A |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}(m(A))^{1/q} \leqslant 2^{1/p}(m(A))^{1/q}.$$

从而我们有 $1-\varepsilon\leqslant 2^{1/p}(m(A))^{1/q}$即 $m(A)\geqslant(1-\varepsilon)^q/2^{q/p}=2\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^q$.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)$ $(1\leqslant p<\infty)$，则存在数列$\{h_n\}$：$h_n\to 0$ $(n\to\infty)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x-h_n)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^1.$$

(2) 设 $f\in L^1(\mathbf{R}^1)$. 若有

$$\|f_t-f\|_1\leqslant |t|^2\quad (f_t=f(x+t)),$$

则 $f(x)=0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(3) 设 $p\geqslant 1$, $f_k\in L^p(\mathbf{R}^1)(k\in\mathbf{N})$，且对任意 $r>0$，有

$$\lim_{i,j\to\infty}\int_{|x|<r}|f_i(x)-f_j(x)|^p\mathrm{d}x=0,$$

则存在$\{f_{k_m}(x)\}$，使得 $\lim\limits_{m\to\infty} f_{k_m}(x)=f(x)$, a. e. $x\in\mathbf{R}^n$.

(4) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_p=0(1\leqslant p\leqslant\infty)$，则存在$\{f_{n_k}(x)\}$以及 $0\leqslant F(x)$：$F\in L^p(E)$，使得

$$|f_{n_k}(x)|\leqslant F(x)\quad (k\in\mathbf{N}, \text{a. e. } x\in E),$$

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=0,\quad \text{a. e. } x\in E.$$

证明 (1) 注意 $\lim\limits_{h\to 0}\int_{\mathbf{R}^1}|f(x-h)-f(x)|\mathrm{d}x=0$.

(2) 设 $f(x)$的 Fourier 变换为 $\hat{f}(x)$，因为$\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$ 以及 $\hat{f}_t(x)=\hat{f}(x)\mathrm{e}^{it}$，所以得到

$$\|(f_t-f)^\wedge\|_\infty=\|\hat{f}(\mathrm{e}^{it}-1)\|_\infty\leqslant\|f_t-f\|_1<|t|^2.$$

从而对一切 x,t，有 $\hat{f}(x)\cdot|\mathrm{e}^{it}-1|\leqslant t^2$ 或

$$|\hat{f}(x)||(\mathrm{e}^{it}-1)/t|\leqslant|t|\quad (|t|\neq 0).$$

令$|t|\to 0$，可知$|\hat{f}(x)|\leqslant 0$. 这说明 $f(x)=0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(3) 对 $r=1$，由题设知，在$\{f_k(x)\chi_{|x|\leqslant 1}(x)\}$中可选出子列$\{f_{k_m}(x)\}$，使得 $f_{k_m}(x)$在$|x|\leqslant 1$ 上是几乎处处收敛的. 对 $r=2$，在

$\{f_{k_m}(x)\chi_{|x|\leqslant 2}(x)\}$又可选出子列$\{f_{k_{m_i}}(x)\}$，使其在$|x|\leqslant 2$上几乎处处收敛，再对$r=3,4,\cdots$，一直做下去，可得可列个可列函数列，它们各自在$|x|\leqslant N$上几乎处处收敛. 最后，用对角线法抽取子列，再重新编号即可得证.

(4) 由题设知，$\lim\limits_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|_p=0$. 从而存在子列$\{f_{n_k}(x)\}$，使得

$$\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p<1/2^k\quad(k=1,2,\cdots).$$

令$F(x)=|f_{n_1}(x)|+\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,(x\in E)$，我们有

$$\|F\|_p\leqslant\|f_{n_1}\|_p+\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p<+\infty,$$

$$|f_{n_k}(x)|=\left|f_{n_1}(x)+\sum_{i=1}^{k-1}[f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)]\right|\leqslant F(x)\quad(k\in\mathbf{N}).$$

由此易知$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=0$, a. e. $x\in E$.

例 9 试证明下列命题:

(1) 若$f\in L^p(\mathbf{R}^n)(1\leqslant p<\infty)$，则

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)+f(x-t)|^p\mathrm{d}x=2\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

(2) $f(x)$在$\mathbf{R}^n$中任一测度有限的可测集上均可积的充分必要条件是：存在$f_1\in L^1(\mathbf{R}^n)$，$f_2\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

(3) $L^\infty((0,1))$是不可分的.

(4) 设$f\in L^p(\mathbf{R}^1)(1\leqslant p\leqslant\infty)$，则

$$\lim_{h\to 0}\|f+f_h\|_p=2\|f\|_p\quad(f_h(x)=f(x-h)).$$

证明 (1) 对任给的$\varepsilon>0$，作分解:

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

其中$g(x)$是$\mathbf{R}^n$上具有紧支集的连续函数，而$\|h\|_p<\varepsilon/4$. 显然，存在$M>0$，当$|t|\geqslant M$时，$g(x)$与$g(x-t)$的支集不相交. 从而有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)+g(x-t)|^p\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n}|g(x-t)|^p\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{\mathbf{R}^n} |g(x)|^p \mathrm{d}x \quad (|t| \geqslant M).$$

由分解式可知 $|\|f\|_p - \|g\|_p| \leqslant \|h\|_p < \varepsilon/4$. 又由

$$f(x) + f(x-t) = [g(x) + g(x-t)] + [h(x) + h(x-t)],$$

以及记 $\varphi_t(x) = \varphi(x-t)$,可得

$$|\|f + f_t\|_p - \|g + g_t\|_p| \leqslant \|h + h_t\|_p \leqslant 2\|h\|_p < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而当 $|t| \geqslant M$ 时,有

$$|\|f + f_t\|_p - 2^{1/p}\|g\|_p| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

最后我们得到

$$\begin{aligned} &|\|f + f_t\|_p - 2^{1/p}\|f\|_p| \\ &\quad \leqslant |\|f + f_t\|_p - 2^{1/p}\|g\|_p| + |2^{1/p}\|g\|_p - 2^{1/p}\|f\|_p| \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) **必要性** 令

$$A_n = \{x \in \mathbf{R}^n : n^2 < |f(x)| \leqslant (n+1)^2\} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则存在 n_0,使得 $\sum_{n=n_0}^{\infty} n^2 m(A_n) < +\infty$. 这是因为:若不然,则对任意的 k,有

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^2 m(A_n) = +\infty.$$

此时,可能有两种情形发生:

(i) 存在 $\{n_j\}$,使 $n_j^2 \cdot m(A_{n_j}) \geqslant 1$,则有 $B_j \subset A_{n_j}$,使得 $n_j^2 m(B_j) = 1$. 从而得 $m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) < \infty$,依题设我们有 $|f(x)|$ 在 $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ 上可积,但这与 $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^2 m(B_j) = +\infty$ 矛盾.

(ii) 存在 N,当 $n \geqslant N$ 时有 $n^2 \cdot m(A_n) < 1$,则 $m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < \infty$. 但 $|f(x)|$ 在 $\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ 上的积分为 $+\infty$,这与题设产生矛盾.

现在既然有了$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^2 \cdot m(A_n) < \infty$，就可令$A = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n$，并记

$$f_1(x) = f(x) \cdot \chi_A(x), \quad f_2(x) = f(x) \cdot \chi_{A^c}(x),$$

则$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$，其中$f_1 \in L^1(\mathbf{R}^n)$，$f_2 \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

充分性 在$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$时，$f(x)$当然是可测函数，且对任一个$m(E) < +\infty$的E，有

$$\int_E |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_E |f_1(x)| \mathrm{d}x + \int_E |f_2(x)| \mathrm{d}x < \infty.$$

(3) 考查函数族$f_t(x) = \chi_{(0,t)}(x)$ $(0<t<1)$，并注意$\|f_{t_1} - f_{t_2}\|_\infty = 1$ $(0<t_1<t_2<1)$.

(4) (i) 设$g \in L^p(\mathbf{R}^1) \cap C_C(\mathbf{R}^1)$，我们有

$$\|g - g_h\|_p \leqslant \|g - g_h\|_\infty \cdot m(\mathrm{supp}(g))^{1/p} \to 0 \quad (h \to 0).$$

(ii) 易知对任给$\varepsilon > 0$，存在$g \in C_C(\mathbf{R}^1)$，使得$\|f - g\|_p < \varepsilon$. 由(i)知存在$\delta > 0$，当$|h| < \delta$时，有$\|g - g_h\|_p < \varepsilon$. 从而可得

$$\begin{aligned}\|f - f_h\|_p &\leqslant \|f - g\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g_h - f_h\|_p \\ &\leqslant 2\|f - g\|_p + \|g_h - g\|_p < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

最后我们有($|h| < \delta$)

$$\big|\|f + f_h\|_p - 2\|f\|_p\big| \leqslant \|f + f_h - 2f\|_p = \|f_h - f\|_p < 3\varepsilon.$$

例 10 试证明下列命题：

(1) 设$f \in L^p(\mathbf{R}^1)$ $(1 \leqslant p < \infty)$，则存在收敛于 0 的正数列$\{a_n\}$，使得对数列$\{b_n\}$：$|b_n| < a_n$ $(n \in \mathbf{N})$，有

$$\lim_{n\to\infty} f_{b_n}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^1 \quad (f_{b_n}(x) = f(x - b_n)).$$

(2) 设$f_n \in \mathrm{AC}([0,1])$，且$f_n(0) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 若$\{f_n'\}$是$L^1([0,1])$中 Cauchy 列，则存在$f \in \mathrm{AC}([0,1])$，使得$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于$f(x)$.

(3) 设$f_k \in L^p([a,b])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$，且$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$，则存在$f \in L^p([a,b])$，使得

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$，a.e. $x \in [a,b]$；

(ii) $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$依$L^p([a,b])$意义收敛于$f(x)$ $(n \to +\infty)$.

(4) 设 $f\in L^p(E)$，$g\in L^p(E)$，$p>1$，则

$$\left|\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x-\int_E|g(x)|^p\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant p\left(\int_E|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left\{\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_E|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\}.$$

证明 (1) 取 $a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots$：$a_n\to 0(n\to\infty)$，使得

$$\|f_{b_n}-f\|_p<2^{-n}\quad(n\in\mathbf{N},|b_n|<a_n).$$

由此可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_{b_n}-f\|_p^p<+\infty$，以及

$$\int_{\mathbf{R}^1}\sum_{n=1}^{\infty}|f(x-b_n)-f(x)|^p=\sum_{n=1}^{\infty}\|f_{b_n}-f\|_p^p<+\infty.$$

从而我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x-b_n)-f(x)|^p<+\infty,\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^1.$$

随之可得 $\lim_{n\to\infty}[f(x)-f(x-b_n)]=0$，　a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(2) 由题设知 $f_n(x)=\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t$. 又由于 $\{f_n'(x)\}$ 是 $L^1([0,1])$ 中的 Cauchy 列，故存在 $g\in L^1([0,1])$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n'(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0.$$

由此易知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

令 $f(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，则 $f\in AC([0,1])$，且有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|f_n'(t)-g(t)|\mathrm{d}t.$$

从而得出命题成立.

(3) 令 $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|(n\in\mathbf{N})$，我们有

$$\|g_n\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p\overset{\Delta}{=\!=}M<+\infty.$$

从而可知$\|g_n\|_p^p \leqslant M^p$，$g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \cdots \leqslant g_n(x) \leqslant \cdots$. 因此极限$\lim\limits_{n\to\infty} g_n^p(x)$几乎处处存在，即$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|\right)^p < +\infty$，a. e. $x \in E$，且有

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p\right) \mathrm{d}x \leqslant M^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{\Delta}{=\!=} f(x), \quad \text{a. e. } x \in E,$$

$$\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant M^p, \quad \|f\|_p \leqslant M = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_p \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_p = 0.$$

这说明(ii)成立.

(4) 注意到对 $p>1$，$a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$，我们有不等式

$$|b^p - a^p| = p \left| \int_a^b x^{p-1} \mathrm{d}x \right| \leqslant p |(b-a)(a^{p-1} + b^{p-1})|,$$

故可得积分不等式

$$\left| \int_E [|f(x)|^p - |g(x)|^p] \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_E \big| |f(x)|^p - |g(x)|^p \big| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant p \int_E \big| |f(x)| - |g(x)| \big| (|f(x)|^{p-1} + |g(x)|^{p-1}) \mathrm{d}x$$

$$\leqslant p \int_E |f(x) - g(x)| (|f(x)|^{p-1} + |g(x)|^{p-1}) \mathrm{d}x$$

（令 $1/p + 1/p'$，根据 Hölder 与 Minkowski 不等式可知）

$$\leqslant p \left(\int_E |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

$$\times \left(\int_E (|f(x)|^{p-1} + |g(x)|^{p-1})^{p'} \mathrm{d}x \right)^{1/p'}$$

$$\leqslant p \|f - g\|_p \left\{ \left(\int_E |f(x)|^{p'(p-1)} \mathrm{d}x \right)^{1/p'} \right.$$

$$\left. + \left(\int_E |g(x)|^{p'(p-1)} \mathrm{d}x \right)^{1/p'} \right\}$$

$$= p \|f - g\|_p (\|f\|_p^{p-1} + \|g\|_p^{p-1}).$$

例 11 设 $f_n \in L^p(E)$ $(1 \leqslant p < \infty, n \in \mathbf{N})$，试证明下列命题等价：

(i) 存在 $f \in L^p(E)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0.$$

(ii) 存在 $f\in L^p(E)$，使得 $f_n(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，而且 $\Gamma=\{|f_n(x)|^p\}$具有积分一致绝对连续性，即对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\int_e |f_n(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon \quad (n\in \mathbf{N}, e\subset E \text{ 且 } m(e)<\delta).$$

证明 (i)⇒(ii). 首先，$f_n(x)$在 E 上依测度收敛于 $f(x)$是显然成立的. 其次，因为$\{f_n(x)\}$是 $L^p(E)$中的 Cauchy 列，所以对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

$$\int_E |f_n(x)-f_m(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon \quad (n,m\geqslant N).$$

由此又得 $\int_E |f_N(x)-f_n(x)|^p\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2^p}(n\geqslant N)$. 对 $f_n(x)(n=1,2,\cdots,N)$，存在 $\delta>0$，当 $e\subset E$: $m(e)<\delta$ 时，有

$$\int_e |f_n(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2^p} \quad (n=1,2,\cdots,N).$$

从而我们有

$$\left|\int_e |f_n(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant 2^p\left(\int_e |f_N(x)|^p\mathrm{d}x + \int_e |f_N(x)-f_n(x)|^p\mathrm{d}x\right)\right.$$

$$<\varepsilon + \int_E |f_N(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x < \varepsilon+\varepsilon \quad (n>N).$$

这立即导致(ii)成立.

(ii)⇒(i). 只需指出$\{f_n(x)\}$是 $L^p(E)$中的 Cauchy 列. 为此，对任给 $\varepsilon>0$:

(A) $m(E)<+\infty$时. 由题设知存在 $\delta>0$，使得

$$\int_e |f_n(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon \quad (n\in \mathbf{N}, e\subset E \text{ 且 } m(e)<\delta). \qquad (*)$$

令 $E_{n,k}=\{x\in E: |f_n(x)-f_k(x)|\geqslant(\varepsilon/2m(E))^{1/p}\}(n,k\in\mathbf{N})$，则

$$\int_{E_{n,k}^c} |f_n(x)-f_k(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\cdot m(E_{n,k}^c)/2m(E) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (**)$$

($E_{n,k}^c=E\setminus E_{n,k}$)因为$\{f_n(x)\}$是依测度收敛列，也是依测度 Cauchy 列，所以可取 N，使得 $m(E_{n,k})<\delta(n\in\mathbf{N},k\geqslant N)$. 从而知

$$\int_{E_{n,k}} |f_n(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2^{p+2}} \quad (n \in \mathbf{N}, k \geqslant N).$$

于是我们有

$$\int_{E_{n,k}} |f_n(x) - f_k(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant 2^p \int_{E_{n,k}} |f_n(x)|^p \mathrm{d}x + 2^p \int_{E_{n,k}} |f_k(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2^p \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+2}} + \frac{\varepsilon}{2^{p+2}} \right) = \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \in \mathbf{N}, k \geqslant N).$$

再根据(* *),即知$\{f_n(x)\}$是$L^p(E)$中的 Cauchy 列.

(B) $m(E)=+\infty$时. 作分解$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$: $m(E_k)<+\infty(k\in\mathbf{N})$,并记$A_j=\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(j=1,2,\cdots)$,$\{A_j\}$是递减可测集合列,使得$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j=\varnothing$. 根据$\Gamma$具有积分一致绝对连续性,可知存在$j_0$,使得

$$\int_{A_{j_0}} |f_n(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2^{p+2}} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

从而我们有

$$\int_{A_{j_0}} |f_n(x) - f_m(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2^p \int_{A_{j_0}} |f_n(x)|^p \mathrm{d}x + 2^p \int_{A_{j_0}} |f_m(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon. \qquad (*)$$

注意到$m(A_{j_0}^c)\leqslant\sum_{j=1}^{j_0-1}m(E_j)<+\infty$,根据(A)就有

$$\int_{A_{j_0}^c} |f_n(x) - f_m(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon \quad (\text{充分大的 } n,m). \qquad (* *)$$

综合(*),(* *)式,说明$\{f_n(x)\}$是$L^p(E)$中 Cauchy 列.

例 12 试证明下列命题:

(1) $f_n(x)=\chi_{[n,n+1]}(x)/x(n\in\mathbf{N})$是$L^1((0,\infty))$中的 Cauchy 列.

(2) $f_n(x)=\chi_{(0,1/n)}(x)/\sqrt{x}\,(n\in\mathbf{N})$不是$L^4((0,1))$中的 Cauchy 列.

(3) 设$f\in L^1((0,\infty))$,$f_k(x)=f(x)\cdot\chi_{[k-1,k]}(x)(k\in\mathbf{N})$,则

$g_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$是 $L^1((0,\infty))$中的 Cauchy 列.

(4) $f_n(x)=\chi_{[n,n+1]}(x)(n\in\mathbf{N})$不是 $L^1((0,\infty))$中的 Cauchy 列.

(5) $f_n(x)=\chi_{(0,n)}(x)/x(n\in\mathbf{N})$不是 $L^1((0,\infty))$中的 Cauchy 列.

(6) $f_n(x)=\chi_{(0,n)}(x)/x^2(n\in\mathbf{N})$是 $L^1((0,\infty))$中的 Cauchy 列.

证明 (1) 注意等式

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^{+\infty} |\chi_{[n,n+1]}(x) - \chi_{[m,m+1]}(x)|/x \cdot \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_m^{m+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

(2) 注意不等式($n<m$)

$$\|f_n - f_m\|_4^4 = \int_{1/m}^{1/n} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_{1/m}^{1/n} = m - n \geqslant 1.$$

(3) 注意不等式

$$\int_0^{+\infty} |g_{n+m}(x) - g_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} \int_0^{+\infty} |f_k(x)|\mathrm{d}x = \sum_{k=n+1}^{n+m} \int_{k-1}^{k} |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \int_n^{n+m} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

(4) 注意$\|f_n-f_m\|_1=2$ ($m<n$).

(5) 注意$\|f_n-f_m\|_1=\int_n^m \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln m-\ln n$ ($n<m$).

(6) 注意$\|f_n-f_m\|_1=\int_n^m \frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$ ($n<m$).

例 13 设 $0<p,q<+\infty$,试证明 $L^p(E)\cdot L^q(E)=L^{pq/(p+q)}$,其中

$$L^p(E)\cdot L^q(E) = \{f\cdot g\colon f\in L^p(E), g\in L^q(E)\}.$$

证明 (i) 若 $g\in L^p(E), h\in L^q(E)$,则我们有

$$\int_E |g(x)h(x)|^{\frac{pq}{p+q}}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p+q}}\left(\int_E |h(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+q}} < +\infty.$$

这说明 $L^p(E)\cdot L^q(E)\subset L^{pq/(p+q)}(E)$.

(ii) 设 $f\in L^{pq/(p+q)}(E)$,令 $g(x)=[f(x)]^{q/(p+q)}$, $h(x)=$

$[f(x)]^{p/(p+q)}$，则 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$，$g\in L^p(E)$，$h\in L^q(E)$. 这说明

$$L^p(E)\cdot L^q(E)\supset L^{pq/(p+q)}(E).$$

§6.3 L^2 空间

基本内容

（一）内积正交系

定义 1 设 $f\in L^2(E)$，$g\in L^2(E)$，记

$$\langle f,g\rangle=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

由此，Schwartz 不等式可写为 $|\langle f,g\rangle|\leqslant\|f\|_2\cdot\|g\|_2$. 显然，$\langle f,g\rangle$ 满足下列内积所要求的性质：

(i) $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$；　(ii) $\langle f_1+f_2,g\rangle=\langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle$；

(iii) $\langle af,g\rangle=a\langle f,g\rangle=\langle f,ag\rangle$ （a 是实数）.

我们称 $\langle f,g\rangle$ 为 f 与 g 的（实）**内积**，$L^2(E)$ 为（完备的）（实）**内积空间**.

定理 1（内积的连续性） 若在 $L^2(E)$ 中有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_2=0$，则对任意的 $g\in L^2(E)$ 有（弱收敛）$\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_k,g\rangle=\langle f,g\rangle$.

定义 2 若 $f,g\in L^2(E)$ 且 $\langle f,g\rangle=0$，则称 f 与 g **正交**；若 $\{\varphi_\alpha\}\subset L^2(E)$ 中任意的两个元都正交，则称 $\{\varphi_\alpha\}$ 是**正交系**；若还有 $\|\varphi_\alpha\|_2=1$（一切 α），则称 $\{\varphi_\alpha\}$ 为 $L^2(E)$ 中的**标准正交系**.

若在正交系 $\{\varphi_\alpha\}\subset L^2(E)$ 中，对一切 α 都有 $\|\varphi_\alpha\|\neq0$，则 $\left\{\dfrac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|_2}\right\}$ 就是标准正交系. 以下我们总假定对一切 α，$\|\varphi_\alpha\|_2\neq0$.

定理 2 $L^2(E)$ 中任一标准正交系都是可数的.

（二）广义 Fourier 级数

定义 3 设 $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系，$f\in L^2(E)$，我们称

$$c_k=\langle f,\varphi_k\rangle=\int_E f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x,\quad k=1,2,\cdots$$

为 f（关于 $\{\varphi_k\}$）的**广义 Fourier 系数**，称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ 为 f 的（关于 $\{\varphi_k\}$ 的）**广义 Fourier 级数**，简记为 $f\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$.

注 设数列$\{c_i\}$,并作$S_k(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\varphi_i(x)$.若有

$$\lim_{k\to\infty}\|S_k-f\|_2=0,$$

则$\langle f,\varphi_j\rangle=c_j(j=1,2,\cdots)$.

定理 3 设$\{\varphi_i\}$是$L^2(E)$中的标准正交系,$f\in L^2(E)$,取定k,作

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i(x),$$

其中$a_i(i=1,2,\cdots,k)$是实数,则当$a_i=c_i=\langle f,\varphi_i\rangle(i=1,2,\cdots,k)$时,使得$\|f-f_k\|_2$达到最小值.

定理 4(Bessel 不等式) 设$\{\varphi_k(x)\}$是$L^2(E)$中的标准正交系,且$f\in L^2(E)$,则$f(x)$的广义 Fourier 系数$\{c_k\}$满足$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|_2^2$.

定理 5(Riesz-Fischer) 设$\{\varphi_k(x)\}$是$L^2(E)$中的标准正交系.若$\{c_k\}$是满足$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<+\infty$的任一实数列,则存在$g\in L^2(E)$,使得$\langle g,\varphi_k\rangle=c_k(k\in\mathbf{N})$.

定义 4 设$\{\varphi_k\}$是$L^2(E)$中的正交系,若$L^2(E)$中不再存在非零元能与一切φ_k正交,则称此$\{\varphi_k\}$是L^2中的**完全正交系**.换句话说,若$f\in L^2(E)$且$\langle f,\varphi_k\rangle=0$ $(k=1,2,\cdots)$,则必有$f(x)=0$, a.e. $x\in E$.

定理 6 设$\{\varphi_k\}$是$L^2(E)$中的标准完全正交系,$f\in L^2(E)$,令$c_k=\langle f,\varphi_k\rangle(k=1,2,\cdots)$,则$\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{k}c_i\varphi_i-f\right\|_2=0$.

定义 5 设$\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_k(x)$是定义在$E$上的函数.如果从

$$a_1\psi_1(x)+a_2\psi_2(x)+\cdots+a_k\psi_k(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in E$$

可推出$a_i=0$ $(i=1,2,\cdots,k)$,那么称函数$\psi_i(i=1,2,\cdots,k)$(在E上)是**线性无关的**;对于由无穷多个函数组成的函数系,如果其中任意有限个函数都是线性无关的,那么称此函数系是线性无关的.(显然,线性无关函数系中不存在几乎处处等于零的函数)

注 一个线性无关的函数系不一定是正交系.不过,我们可以在此函数系的基础上建立起正交系来,这就是下面所讲的 Gram-Schmidt 正交化方法:

设$\{\psi_k\}$是$L^2(E)$中的线性无关系,令

$$\varphi_1(x)=\psi_1(x),\quad \varphi_2(x)=-\frac{\langle\psi_2,\varphi_1\rangle}{\|\varphi_1\|_2^2}\varphi_1(x)+\psi_2(x).$$

一般来说,在取定$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{k-1}$时,令

$$\varphi_k(x)=a_{k,1}\varphi_1(x)+a_{k,2}\varphi_2(x)+\cdots+a_{k,k-1}\varphi_{k-1}(x)+\psi_k(x),$$

其中

$$a_{k,i} = -\frac{\langle \psi_k, \varphi_i \rangle}{\|\varphi_i\|_2^2}, \quad i = 1,2,\cdots,k-1.$$

易知这样所得的$\{\varphi_k\}(k=1,2,\cdots)$是正交的.

由于$L^2(E)$中存在可数稠密集Γ,若将Γ中线性无关的向量选出来,再进行上述正交化过程,就可得到一个正交系.

定理 7 设$\{\varphi_i\}$是$L^2(E)$中的标准正交系,若对任意的$f\in L^2(E)$以及$\varepsilon>0$,存在$\{\varphi_i\}$中的线性组合

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \varphi_{i_j}(x),$$

使得$\|f-g\|_2<\varepsilon$(此时,也称$\{\varphi_i\}$为封闭系),则$\{\varphi_i\}$是完全正交系.

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 设$f,g\in L^2(E)$,则(平行四边形公式)

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2).$$

(2) 设$\|f_n-f\|_2\to 0$, $\|g_n-g\|_2\to 0(n\to\infty)$,则

$$|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

(3) 设$\|f\|_2=\|g\|_2$,则$\langle f+g, f-g\rangle=0$.

(4) 设$\|f_n\|_2\to\|f\|_2$, $\langle f_n, f\rangle\to\|f\|_2^2(n\to\infty)$,则

$$\|f_n - f\|_2 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

证明 (1) 注意等式

$$\int_E [f(x)+g(x)]^2 \mathrm{d}x + \int_E [f(x)-g(x)]^2 \mathrm{d}x = 2\left(\int_E f^2(x)\mathrm{d}x + \int_E g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

(2) 注意$\|g_n\|_2\to\|g\|_2(n\to\infty)$以及不等式

$$|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| = |\langle f_n - f, g_n\rangle + \langle g_n - g, f\rangle| \leqslant \|f_n - f\|_2 \|g_n\|_2 + \|g_n - g\|_2 \|f\|_2.$$

(3) 注意等式

$$\langle f+g, f-g\rangle = \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2 + \langle g, f\rangle - \langle f, g\rangle = 0.$$

(4) 注意$\|f_n-f\|_2^2=\|f_n\|_2^2+\|f\|_2^2-2\langle f_n, f\rangle$.

例 2 试证明下列命题:

(1) 设$\|f_k-f\|_2\to 0(k\to\infty)$,则存在极限

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_E f_n(x)\,f_m(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f\in L^2([0,1])$,$f_0\in L^2([0,1])$,令

$$F(x)=\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t,\quad F_0(x)=\int_0^x f_0^2(t)\mathrm{d}t,$$

则
$$\|F-F_0\|_2\leqslant 2(\|f\|_2^2+\|f_0\|_2^2)^{1/2}\,\|f-f_0\|_2.$$

(3) 设$\{f_n(x)\}$是 E 上可测函数列,且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ (x\in E),\quad F\in L^1(E)\ (F(x)=\sup_{n\geqslant 1}\{f_n^2(x)\}),$$

则$\|f_n-f\|_2\to 0(n\to\infty)$.

证明 (1) 注意$\|f_k\|_2\to\|f\|_2(k\to\infty)$以及等式

$$\int_E(f_n(x)-f_m(x))^2\mathrm{d}x=\int_E f_n^2(x)\mathrm{d}x+\int_E f_m^2(x)\mathrm{d}x-2\int_E f_n(x)f_m(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 因为我们有不等式

$$|F(x)-F_0(x)|\leqslant\int_0^1(|f(x)|+|f_0(x)|)|f(x)-f_0(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\left(4\int_0^1[f^2(x)+f_0^2(x)]\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^1|f(x)-f_0(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

所以结论成立.

(3) 注意$|f_n(x)-f(x)|^2\leqslant 4[f_n^2(x)+f^2(x)]\leqslant 8F(x)$.

例 3 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^2([0,1])$,令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$$I_h=\left(\int_0^{1-h}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant C\,\|f\|_2,$$

其中 $0<h<1$,且 C 与 f 无关.

(2) 设 $f_n\in L^2([a,b])$,$g_n\in L^2([a,b])(n\in\mathbf{N})$,且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad \lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x),\quad \text{a. e. }x\in[a,b],$$

$$\int_a^b|g_n(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant M,\quad |f_n(x)|\leqslant F(x)\ (n\in\mathbf{N}),\quad F\in L^2([a,b]),$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$

证明 (1) 我们有

$$
\begin{aligned}
I_h &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{1-h}\left|\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{h}\left(\int_0^{1-h}\left(\int_x^{x+h}|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)\cdot h\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\int_0^{1-h}\left(\int_x^{x+h}|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{h}}\left\{\int_0^h\left(\int_0^t|f(t)|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\right. \\
&\quad \left. + \int_h^{1-h}\left(\int_{t-h}^t|f(t)|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t + \int_{1-h}^1\left(\int_{t-h}^{1-h}|f(t)|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{h}}\left\{\int_0^h|f(t)|^2t\mathrm{d}t + \int_h^{1-h}|f(t)|^2\cdot h\mathrm{d}t\right. \\
&\quad \left. + \int_{1-h}^1|f(t)|^2(1-t)\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{h}}\left\{\int_0^h|f(t)|^2h\mathrm{d}t + \int_h^{1-h}|f(t)|^2h\mathrm{d}t + \int_{1-h}^1|f(t)|^2h\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \\
&= C\|f\|_2 \quad (C = 1/\sqrt{h}).
\end{aligned}
$$

(2) 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得($e\subset[a,b]$)

$$\int_e f^2(x)\mathrm{d}x < \varepsilon,\quad \int_e|f(x)g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon \quad (m(e) < \delta),$$

而且 $g_n(x)$ 在 $[a,b]\setminus e$ 上一致收敛于 $g(x)$. 即存在 N,使得

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon \quad (n > N, x \in [a,b]\setminus e).$$

我们分解积分为

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|\mathrm{d}x \\
&\qquad \leqslant \int_a^b|f_n(x) - f(x)||g_n(x)|\mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + \int_a^b|f(x)||g_n(x) - g(x)|\mathrm{d}x \\
&\qquad \triangleq \mathrm{I} + \mathrm{II},
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{I}^2 \leqslant \int_a^b|f_n(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b|g_n(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\|f_n - f\|_2^2 \to 0 \quad (n\to\infty),$$

$$\text{II} = \int_{[a,b]\setminus e} |g_n(x) - g(x)||f(x)|\mathrm{d}x + \int_e |g_n(x) - g(x)||f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon\|f\|_2 + \int_e |g_n(x)f(x)|\mathrm{d}x + \int_e |f(x)g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon\|f\|_2 + \left(\int_e |g_n(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_e |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \varepsilon$$

$$\leqslant \varepsilon\|f\|_2 + M^{1/2}\cdot\varepsilon^{1/2} + \varepsilon \quad (n > N).$$

由此即得所证.

例 4 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^2(\mathbf{R}^1)$. 若 $xf(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上平方可积,则 $f\in L^1(\mathbf{R}^1)$.

(2) 设 $f\in L^2(\mathbf{R}^1)$, $g\in L^2(\mathbf{R}^1)$, 令 $f_h(x)=[f(x+h)-f(x)]/h$ $(h\neq 0)$. 若有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbf{R}^1} |f_h(x) - g(x)|^2\mathrm{d}x = 0,$$

则存在常数 c,使得 $f(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+C$, a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

证明 (1) 注意不等式$(0<r<+\infty)$

$$\int_{\mathbf{R}^1} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{|x|<r} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{|x|>r} |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^1} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}(2r)^{1/2} + \left(\int_{\mathbf{R}^1} |f(x)\cdot x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{|x|>r}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right)^{1/2}$$

$$= (2r)^{1/2}\|f\|_2 + 2\|xf\|_2/r.$$

(2) 注意到不等式

$$\int_0^x |g(t) - f_h(t)|\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^1} |g(t) - f_h(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}|x|^{1/2},$$

可知

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\int_0^x \frac{f(t+h) - f(t)}{h}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(t)\mathrm{d}t$$
$$=f(x)-C,\quad \text{a. e. } x\in\mathbf{R}^1.$$

由此即得所证.

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^2([0,1])$, $g\in L^2([0,1])$. 若 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left\{\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2\right\}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负可测实值函数, 令

$$\Gamma=\{f(x):\ f\cdot g\in L^2([a,b])\},$$

则 Γ 在 $L^2([a,b])$ 中稠密.

证明 (1) 记 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\alpha$, 我们有

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1[f(x)g(x)-\alpha f(x)]\mathrm{d}x\right|$$
$$=\left|\int_0^1 f(x)[g(x)-\alpha]\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)||g(x)-\alpha|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^1(g(x)-\alpha)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$=\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left\{\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x-2\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right]^2\right\}^{1/2}$$
$$=\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left\{\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)^2\right\}^{1/2}.$$

(2) 反证法. 若结论不真, 则存在 $\varphi\in L^2([a,b])$, $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上不几乎处处等于 0, 使得

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x=0\quad(f\in\Gamma).$$

令 $E_k=\{x\in[a,b]:\ g(x)\leqslant k\}$, 对任意的 e_k: $e_k\subset E_k$, 且取 Γ 中元 $f(x)=\chi_{e_k}(x)\left(\text{注意 }\int_a^b g(x)\chi_{e_k}(x)\mathrm{d}x\leqslant k(b-a)\right)$, 我们有 $\int_{e_k}\varphi(x)\mathrm{d}x=0$. 因为 e_k 在 E_k 中的任意性, 所以易知 $\varphi^+(x)=0$, a. e. $x\in E_k$, 随之有 $\varphi^+(x)$

$=0$, a.e. $x\in[a,b]$. $\varphi^-(x)$也同此理. 因此 $\varphi(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$. 导致矛盾，证毕.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f_n\in L^2([0,1])$，且$\|f_n\|_2\leqslant M(n\in\mathbf{N})$. 若 $f_n(x)$在$[0,1]$上依测度收敛于 0，则$\|f_n\|_1\to 0(n\to\infty)$.

(2) 设 $f_n\in L^2(E)(n\in\mathbf{N})$，且$\|f_n-f_{n+1}\|_2\leqslant 2^{-n}(n\in\mathbf{N})$，则存在 $f\in L^2(E)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0,\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in E.$$

(3) 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$是$[0,A]$(任意的 $A>0$)上的绝对连续函数. 若有

$$\int_0^\infty|f_n'(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant M^2,\quad |f_n(x)|\leqslant\frac{1}{x}\quad(n=1,2,\cdots;0<x<\infty),$$

则存在一致收敛子列$\{f_{n_k}(x)\}$.

证明 (1) 对任给 $\varepsilon>0$，作 $E_n=\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\geqslant\varepsilon\}$，依题设知 $m(E_n)\to 0(n\to\infty)$，即存在 N，$m(E_n)<\varepsilon^2(n\geqslant N)$. 从而我们有

$$\begin{aligned}\|f_n\|_1&=\left\{\int_{E_n}+\int_{[0,1]\setminus E_n}\right\}|f_n(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_{E_n}|f_n(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}(m(E_n))^{1/2}+\varepsilon\\&<\|f_n\|_2\varepsilon+\varepsilon\quad(n\geqslant N).\end{aligned}$$

由此即可得证.

(2) 注意到$\|f_{n+k}-f_n\|_2\leqslant 2^{-n}+\cdots+2^{-(n+k-1)}<2^{-(n-1)}$，故知$\{f_n(x)\}$是 $L^2(E)$中 Cauchy 列. 从而存在 $f\in L^2(E)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0.$$

此外，由$\|f_n-f_{n+k}\|_2<2^{-(n-1)}$可知(令 $k\to\infty$)$\|f_n-f\|\leqslant 2^{-(n-1)}$ $(n\in\mathbf{N})$. 从而又有

$$\begin{aligned}\int_E\sum_{n=1}^\infty|f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^\infty\int_E|f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^\infty\|f_n-f\|_2^2\leqslant\sum_{n=1}^\infty 2^{-2(n-1)}<+\infty.\end{aligned}$$

这说明$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|^2<+\infty$，a. e. $x\in E$，由此即得 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，a. e. $x\in E$.

(3) (i) 因为我们有不等式($0\leqslant x<+\infty$)

$$|f_n(x)-f_n(1)|\leqslant\left|\int_1^x f_n'(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\left(\int_1^x|f_n'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}|x-1|^{1/2}\leqslant M|x-1|^{1/2},$$

$$|f_n(x)|\leqslant|f_n(1)|+M|x-1|^{1/2}\leqslant 1+M\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

又注意到当 $x>1$ 时，$1/x<1$，所以 $|f_n(x)|\leqslant 1+M(0\leqslant x<\infty)$. 这说明$\{f_n(x)\}$在$[0,\infty)$上一致有界且等度连续.

(ii) 根据(i)可知，对 $k\in\mathbf{N}$，在$\{f_n(x)\}$中可选$\{f_{k,n}(x)\}$在$[0,k]$上一致收敛；进一步又在$\{f_{k,n}(x)\}$中可选$\{f_{k+1,n}(x)\}$，使它在$[0,k+1]$上一致收敛；…. 这样一直做下去，最后可取出 $g_n(x)=f_{n,n}(x)(n\in\mathbf{N})$，它就在$[0,\infty)$上一致收敛.

注 $\{g_n(x)\}$是 $L^2([0,\infty))$中的 Cauchy 列. 事实上，对 $0<\varepsilon<1,k>3/\varepsilon$，易知存在 N，使得

$$|g_n(x)-g_m(x)|<\varepsilon/3\quad(0\leqslant x\leqslant k,m,n>N).$$

而当 $x>k$ 时，又有 $|g_m(x)-g_n(x)|\leqslant 2/x<2\varepsilon/3$. 从而取 x_0: $4/x_0<\varepsilon/2$，以及 N，使得$\|g_m-g_n\|_\infty<(\varepsilon/2x_0)^{1/2}(m,n>N)$. 因此我们有

$$\|g_m-g_n\|_2^2=\left\{\int_0^{x_0}+\int_{x_0}^{+\infty}\right\}|g_m(x)-g_n(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{2x_0}+\frac{k}{x_0}<\varepsilon.$$

例 7 试证明下列命题：

(1) 令 $X=\left\{f\in C^{(\infty)}([0,1]):\ f(0)=0,\ \int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=0\right\}$，则 X 在 $L^2([0,1])$中稠密.

(2) 设$\{f_n(x)\}$是 $L^2([0,1])$中的绝对连续函数列，且 $f_n'\in L^2([0,1])$，又存在 $f,g\in L^2([0,1])$，满足

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0,\quad\lim_{n\to\infty}\|f_n'-g\|_2=0.$$

则 $f(x)$是$[0,1]$上的绝对连续函数，且有

$$f'(x)=g(x),\quad\text{a.e. }x\in[0,1].$$

证明 (1) 易知$\{x\cos(2n\pi x)\}\subset X$，$\{x\sin(2n\pi x)\}\subset X$. 现在设

$g\in L^2([0,1])$且与 X 中一切元正交，则我们有

$$0=\int_0^1 x\cos(2n\pi x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}x\cos nx\cdot g\left(\frac{x}{2\pi}\right)\mathrm{d}x,$$

$$0=\int_0^1 x\sin(2n\pi x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}x\sin nx\cdot g\left(\frac{x}{2\pi}\right)\mathrm{d}x,$$

从而可知 $xg(x)=C$（常数）$(x\in[0,1])$. 因此，$g(x)=0$, a. e. $x\in[0,1]$.

(2) 由题设知，存在$\{f_{n_k}(x)\}$：$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)$, a. e. $x\in[0,1]$. 又由$\|f_n'-g\|_2\to 0(n\to\infty)$，还可知$(0\leqslant x_0<x\leqslant 1)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n'(t)\chi_{[x_0,x]}(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t.$$

现在取 $x_0,x\in[0,1]$，使得 $f_{n_k}(x)\to f(x)$, $f_{n_k}(x_0)\to f(x_0)(k\to\infty)$. 我们有

$$f_{n_k}(x)-f_{n_k}(x_0)=\int_{x_0}^x f_{n_k}'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f_{n_k}'(t)\chi_{[x_0,x]}(t)\mathrm{d}t,$$

故当 $k\to\infty$时有 $f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t$. 从而得 $f\in AC([0,1])$，而且 $f'(x)=g(x)$, a. e. $x\in[0,1]$.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x,y)$是$[0,1]\times[0,1]$上可测函数，$E=\{(x,y):0\leqslant|x|\leqslant y\leqslant 1\}$. 若 $f\in L^2(E)$，则 $\lim\limits_{y\to 0}\int_{-y}^y|f(x,y)|\mathrm{d}x=0$.

(2) 设 $f_n\in C([0,1])(n\in\mathbf{N})$, $\|f_n-f_m\|_2\to 0(n,m\to\infty)$. 又 $K(x,y)$是$[0,1]\times[0,1]$上的连续函数，且令

$$F_n(x)=\int_0^1 K(x,y)f_n(y)\mathrm{d}y\quad(n\in\mathbf{N}),$$

则$\{F_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛.

证明 (1) 因为我们有$(0\leqslant y\leqslant 1)$

$$\int_{-y}^y|f(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-y}^y|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}(2y)^{1/2},$$

所以得到

$$\int_0^1\frac{1}{2y}\left(\int_{-y}^y|f(x,y)|\mathrm{d}x\right)^2\mathrm{d}y\leqslant\int_0^1\left(\int_{-y}^y|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\leqslant\|f\|_2^2<+\infty.$$

现在假定结论不真，即存在 $l>0$，使得当 $|y|$ 充分小时，有

$$\left(\int_{-y}^{y}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\geqslant l,$$

则又得 $\|f\|_2=+\infty$，导致矛盾.

(2) 因为我们有不等式

$$\begin{aligned}|F_n(x)-F_m(x)| &\leqslant \int_0^1 |K(x,y)||f_n(y)-f_m(y)|\mathrm{d}y \\ &\leqslant \left(\int_0^1 K^2(x,y)\mathrm{d}y\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f_m(y)-f_n(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{1/2} \\ &\leqslant M\left(\int_0^1 |f_n(y)-f_m(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{1/2} \quad (M=\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}}|K(x,y)|^2),\end{aligned}$$

所以得到

$$\|F_n-F_m\|_\infty=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|F_n(x)-F_m(x)|\}\to 0 \quad (n,m\to\infty).$$

由此即可得证.

例 9 设 $F(x)$ 在 (a,b) 上可测，试证明下述(1)与(2)等价：

(1) 存在 $f\in L^2((a,b))$，使得 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,(a<x<b)$；

(2) 存在 $M>0$，使得对任一分划 Δ：$a<x_0<x_1<\cdots<x_n<b$，有

$$I_\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{|F(x_k)-F(x_{k-1})|^2}{x_k-x_{k-1}}\leqslant M.$$

证明 (1)⇒(2). 因为我们有

$$\begin{aligned}I_\Delta &=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k-x_{k-1}}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(t)\mathrm{d}t\right|^2 \\ &\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k-x_{k-1}}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}\mathrm{d}t\right) \\ &\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\|f\|_2^2,\end{aligned}$$

所以取 $M=\|f\|_2^2$ 即可得证.

(2)⇒(1). 依题设知，对 (a,b) 内任意的互不相交之区间列 $\{(\alpha_n,\beta_n)\}$，均有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|F(\beta_n)-F(\alpha_n)|^2}{\beta_n-\alpha_n}\leqslant M.$$

根据不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|F(\beta_i)-F(\alpha_i)|=\sum_{i=1}^{n}\frac{|F(\beta_i)-F(\alpha_i)|}{\sqrt{\beta_i-\alpha_i}}\cdot\sqrt{\beta_i-\alpha_i}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|F(\beta_i)-F(\alpha_i)|^2}{\beta_i-\alpha_i}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(M\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\right)^{1/2},$$

可得 $F\in \mathrm{AC}((a,b))$. 这说明存在 $f\in L^1((a,b))$，使得

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C\quad(a<x<b).$$

为证 $f\in L^2((a,b))$，只需指出

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot m(E_n)<+\infty,$$

$$E_n=\{x\in(a,b):n\leqslant|f(x)|^2<n+1\}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

对此，先引用一个结论："对(a,b)中任意的互不相交可测集 $E_1,E_2,\cdots,$ E_n，以及 $\varepsilon>0$，均有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m(E_i)+\varepsilon}\left|\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\right|^2\leqslant M." \tag{*}$$

有了这一结论，我们令

$$E_n^+=\{x\in(a,b):\sqrt{n}\leqslant f(x)<\sqrt{n+1}\},$$

$$E_n^-=\{x\in(a,b):-\sqrt{n+1}<f(x)\leqslant-\sqrt{n}\},$$

易知

$$\sum_{n=1}^{\infty}nm(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\cdot m(E_n^+)+n\cdot m(E_n^-))$$

$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{m(E_k^+)+\varepsilon}\left|\int_{E_k^+}f(x)\mathrm{d}x\right|^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m(E_k^-)+\varepsilon}\left|\int_{E_k^-}f(x)\mathrm{d}x\right|^2\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{m(E_k^+)+\varepsilon}\left|\int_{E_k^+}f(x)\mathrm{d}x\right|^2\right.$$

$$+\frac{1}{m(E_k^-)+\varepsilon}\left|\int_{E_k^-}f(x)\mathrm{d}x\right|^2\Bigg)\leqslant 2M.$$

注 (*)式的证明：

(i) 若 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$是(a,b)中的开集：$E_i=\bigcup_{j\geqslant 1}(\alpha_{ij},\beta_{ij})$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\right|^2}{m(E_i)+\varepsilon}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\sum_{j\geqslant 1}\int_{\alpha_{ij}}^{\beta_{ij}}f(x)\mathrm{d}x\right|^2}{m(E_i)+\varepsilon}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{\beta_{ij}-\alpha_{ij}}}\int_{\alpha_{ij}}^{\beta_{ij}}f(x)\mathrm{d}x\cdot\sqrt{\beta_{ij}-\alpha_{ij}}\right|^2\Big/(m(E_i)+\varepsilon)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\geqslant 1}\left|\int_{\alpha_{ij}}^{\beta_{ij}}f(x)\mathrm{d}x\right|^2\Big/(\beta_{ij}-\alpha_{ij})\leqslant M.$$

(ii) 若 $E_i(i=1,2,\cdots,n)\subset(a,b)$是紧集，则作$(a,b)$中的递减开集列$\{G_{ij}\}(i=1,2,\cdots,n;j\in\mathbf{N})$，使得

$$E_i=\bigcap_{j=1}^{\infty}G_{ij}(i=1,2,\cdots,n),\quad G_{i1}\cap G_{k1}=\varnothing\quad(i\neq k).$$

现在对 $G_{1j},G_{2j},\cdots,G_{nj}$应用(i)，并取极限，(*)式成立.

(iii) 对一般可测集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$，可作递增紧集列$\{E_{ij}\}$：

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{ij}\subset E_i,\quad\lim_{j\to\infty}m(E_{ij})=m(E_i)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

并应用(ii)于 $E_{1j},E_{2j},\cdots,E_{nj}$，再取极限，即知(*)式成立.

例 10 试证明下列命题：

(1) $L^2[-\pi,\pi]$中的三角函数列：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\ \cdots$$

是标准正交系.

(2) (**三角函数系是完全正交系**) 设 $E=[-\pi,\pi]$，则三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \cdots$$

是 $L^2(E)$中的完全正交系.

(3) $L^2(E)$中的正交系$\{\varphi_k\}$一定是线性无关的.

证明 (1) 证略.

(2) (i) 设 $f(x)$是$[-\pi,\pi]$上的连续函数. 若其一切 Fourier 系数都是零,则 $f(x)\equiv 0$.

事实上,如果 $f(x)\not\equiv 0$,那么存在 $x_0\in[-\pi,\pi]$,使得 $|f(x_0)|$为最大值. 不妨设 $f(x_0)=M>0$,从而可取到充分小的区间 $I=(x_0-\delta,x_0+\delta)$,使得

$$f(x)>\frac{1}{2}M,\quad x\in I\cap[-\pi,\pi].$$

现在,研究三角多项式:

$$t(x)=1+\cos(x-x_0)-\cos\delta.$$

因为 $t^n(x)$仍是一个三角多项式,所以根据假定我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

但这是不可能的. 一方面,因为当 $x\in[-\pi,\pi]\setminus I$ 时有 $|t^n(x)|\leqslant 1$,所以

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus I}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x\leqslant M\cdot 2\pi.$$

另一方面,因为令 $J=(x_0-\delta/2,x_0+\delta/2)$时,存在 $r>1$,使得

$$t(x)\geqslant r,\quad x\in J\cap[-\pi,\pi],$$

所以

$$\int_{I\cap[-\pi,\pi]}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{I\cap[-\pi,\pi]}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}Mr^n\frac{\delta}{2}.$$

合并上述两个积分不等式,得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)t^n(x)\mathrm{d}x=\infty.$$

上述矛盾说明必须 $f(x)\equiv 0$.

(ii) 设 $f\in L^2(E)$. 我们作函数

$$g(x)=\int_{-\pi}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

因为 $g(x)$是$[-\pi,\pi]$上的绝对连续函数且 $g(-\pi)=g(\pi)=0$,所以通过分部积分公式可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\begin{pmatrix}\sin kx\\ \cos kx\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

$$=g(x)\begin{pmatrix}-\cos kx\\ \sin kx\end{pmatrix}\frac{1}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\begin{pmatrix}-\cos kx\\ \sin kx\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

$$= 0, \quad k \geqslant 1.$$

现在令

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x, \quad G(x) = g(x) - B,$$

我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\begin{pmatrix}\cos kx \\ \sin kx\end{pmatrix}\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

即 $G(x)$的一切 Fourier 系数都是零. 由(i)知 $G(x)\equiv 0$,即 $g(x)\equiv B$. 从而可知

$$f(x) = g'(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

(3) 事实上,若在$\{\varphi_k\}$中任取有限个并假定

$$a_1\varphi_{k_1}(x) + a_2\varphi_{k_2}(x) + \cdots + a_i\varphi_{k_i}(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in E,$$

则在上式两端各乘以 $\varphi_{k_1}(x)$,且在 E 上对 x 进行积分,由$\{\varphi_k\}$的正交性可知 $a_1=0$,同理可证 $a_2=a_3=\cdots=a_i=0$.

例 11 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^1([-\pi,\pi])$,$\{\varphi_n(x)\}$是$(-\pi,\pi]$上的三角函数系. 若有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则 $f(x)=0$,a.e. $x\in[-\pi,\pi]$.

(2) $\{\sin nx\}$是 $L^2([0,\pi])$中的完全正交系.

(3) $\varphi_n(x)=\sin\lambda_n x$ $(n=1,2,\cdots)$是 $L^2([0,1])$中的正交系,其中 λ_n $(n=1,2,\cdots)$是方程 $\tan x=x$ 的正根.

证明 (1) 由题设知,对三角多项式 $Q(x)$,有$\langle f,Q\rangle=0$. 而对 $g\in C([-\pi,\pi])$,存在三角多项式列$\{Q_n(x)\}$,它在$[-\pi,\pi]$上一致收敛到 $g(x)$,故有

$$0 = \lim_{n\to\infty}\langle f,Q_n\rangle = \langle f,g\rangle.$$

又对$[-\pi,\pi]$中的任一正测集 E,存在 $g_n\in C([-\pi,\pi])$,$|g_n(x)|\leqslant 1$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=\chi_E(x)$. 从而根据控制收敛定理,可得$\langle f,\chi_E\rangle=0$. 由此立即推出结论成立.

(2) 显然,$\{\sin nx\}$是 $L^2([0,\pi])$中的正交系. 此外,设 $f\in$

$L^2([0,\pi])$，且有 $\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$，则作 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的奇延拓：$f^*(x)=f(x)(0<x\leqslant\pi)$，$f^*(x)=-f(-x)(-\pi\leqslant x<0)$. 显然 $\int_{-\pi}^{\pi}f^*(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，而且 $(n\in\mathbf{N})$

$$\int_{-\pi}^{0}f^*(x)\sin nx\mathrm{d}x\xlongequal{x=-t}\int_0^\pi f(t)\sin nt\mathrm{d}t=0.$$

这说明 $\int_{-\pi}^{\pi}f^*(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$. 从而 $f^*(x)=0$, a. e. $x\in[-\pi,\pi]$. 由此即得所证.

(3) 我们有等式

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\sin\lambda_n x\cdot\sin\lambda_m x\cdot\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{2}\left\{\int_0^1\cos(\lambda_n+\lambda_m)x\mathrm{d}x-\int_0^1\cos(\lambda_n-\lambda_m)x\mathrm{d}x\right\}\\
&=-\frac{1}{2}\,\frac{(\lambda_n-\lambda_m)\sin(\lambda_n+\lambda_m)-(\lambda_n+\lambda_m)\sin(\lambda_n-\lambda_m)}{(\lambda_n^2-\lambda_m^2)}\\
&=-\frac{\lambda_n\cos\lambda_n\cdot\sin\lambda_m-\lambda_m\cdot\sin\lambda_n\cdot\cos\lambda_m}{(\lambda_n^2-\lambda_m^2)}\\
&=-\frac{\sin\lambda_n\cdot\sin\lambda_m-\sin\lambda_n\cdot\sin\lambda_m}{(\lambda_n^2-\lambda_m^2)}=0.
\end{aligned}$$

例 12 试证明下列命题：

(1) 设 $\{\varphi_k\}\subset L^2([a,b])$ 是标准正交系，若存在极限

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b],$$

则 $\varphi(x)=0$, a. e. $x\in[a,b]$.

(2) 设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $L^2(E)$ 中标准正交系. 若 $f\in L^2(E)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x=0.$$

(3) 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $L^2([0,1])$ 中的标准正交系，则

$$\sup_{n\geqslant1}\left\{\bigvee_0^1(f_n)\right\}=+\infty.$$

(4) 设 $f\in L^2([0,1])$，且 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=1$. 对 $\varepsilon>0$，作

$$E_n(\varepsilon) = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (0,1)^n: \left(\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right| \Big/ n\varepsilon\right) \geqslant 1\right\},$$

则 $\lim_{n\to\infty} m(E_n(\varepsilon)) = 0$.

证明 (1) 由 $\int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{k\to\infty} \varphi_k^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k^2(x)\mathrm{d}x = 1$, 可知 $\varphi \in L^2([a,b])$. 从而我们有

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x,$$

由此即得 $\varphi(x) = 0$, a. e. $x \in [a,b]$.

(2) 记 $C_k = \int_E f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\ (k \in \mathbf{N})$, 注意 $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leqslant \|f\|_2^2$.

(3) 反证法. 假定 $M \triangleq \sup_{n\geqslant 1}\left\{\bigvee_0^1 (f_n)\right\} < +\infty$, 则

$$|f_n(0)| - M \leqslant |f_n(x)| \leqslant |f_n(0)| + M \quad (x \in [0,1]).$$

易知 $\{f_n(0)\}$ 是有界列(否则导致 $\|f_n\|_2 > 1$). 根据 Helly 选择原理(把 $f_n(x)$ 分成两个递增函数), 可知存在 $f(x)\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$, 使得 $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$. 从而得 $f(x) = 0$, a. e. $x \in [0,1]$. 注意到 $f_{n_k}^2(x) \to 0\ (k \to \infty$, a. e. $x \in [0,1])$, 根据控制收敛定理, 即得 $\|f_{n_k}\|_2 \to 0\ (k \to \infty)$. 这与 $\|f_k\|_2 = 1$ 矛盾.

(4) 因为我们有

$$\begin{aligned}
m(E_n(\varepsilon)) &\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{E_n(\varepsilon)} \left(\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right| \Big/ n\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&\leqslant \frac{1}{n\varepsilon} \left(\int_{[0,1]^n} \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{n\varepsilon} \left(\int_{[0,1]^n} \sum_{k=1}^{n} f^2(x_k) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{n\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{[0,1]^n} f^2(x_k) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{n\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}\,\varepsilon},
\end{aligned}$$

所以结论成立.

例 13 试证明下列命题：

(1) 设$\{f_n\}\in L^2([0,1])$是标准正交系，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t\right|^2\leqslant x,\quad x\in[0,1].$$

(2) 设$\{f_k\}\subset L^2(E)$是正交系，并记$\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)/n(n\in\mathbf{N})$.

若$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_2^2/n^2=0$，则$\sigma_n(x)$在$E$上依测度收敛于0.

(3) 设$\{\varphi_n\}\subset L^2([a,b])$是标准正交系，则$\{\varphi_n\}$是完全系当且仅当

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)^2=x-a,\quad x\in[a,b].$$

(4) 设$\{\varphi_n\}\subset L^2([a,b])$是标准正交系，令

$$f_n(x)=\varphi_1(x)\int_a^x\varphi_1(t)\mathrm{d}t+\cdots+\varphi_n(x)\int_a^x\varphi_n(t)\mathrm{d}t.$$

若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致有界，且几乎处处收敛，则$\{\varphi_n(x)\}$是完全系当且仅当$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{1}{2}$, a. e. $x\in[a,b]$.

证明 (1) 注意不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 f_n(t)\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t\right|^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f_n,\chi_{(0,x]}\rangle|^2\leqslant\|\chi_{[0,x]}\|_2^2=x.$$

(2) 由题设知，任给$\varepsilon>0,\delta>0$，存在N，使得$\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_2^2/n^2<\varepsilon^2\delta(n\geqslant N)$. 从而得(正交性)

$$\int_E\sigma_n^2(x)\mathrm{d}x=\int_E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right)^2\mathrm{d}x<\varepsilon^2\delta\quad(n\geqslant N).$$

令$e_n=\{x\in E:|\sigma_n(x)|>\varepsilon\}$，我们有

$$\varepsilon^2\cdot m(e_n)\leqslant\int_{e_n}|\sigma_n(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon^2\delta,\quad m(e_n)<\delta\quad(n\geqslant N),$$

即得所证.

(3) 必要性　假定$\{\varphi_n\}$是$L^2([a,b])$中的完全系，则

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b \chi_{[a,x]}(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\chi_{[a,x]},\varphi_n\rangle|^2=\|\chi_{[a,x]}\|_2^2=x-a.$$

充分性 假定 $I=x-a$，则对 $a\leqslant x\leqslant y$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_x^y \varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)^2 = y-x.$$

从而知对$[a,b]$上的阶梯函数 $g(x)$，就有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b g(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)^2=\|g\|_2^2$.

再对 $f\in L^2([a,b])$，且阶梯函数逼近，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \|f\|_2^2.$$

由此即可得证.

(4) 令 $g_n(x)=\varphi_n(x)\int_a^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t$，则易知

$$G_n(x)\triangleq\int_a^x g_n(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int_a^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

又记 $f_n(x)\to f(x)$，a. e. $x\in[a,b]$ $(n\to\infty)$，则由题设知

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^x g_k(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

若 $f(x)=1/2$，a. e. $x\in[a,b]$，则由上题知$\{\varphi_n(x)\}$是完全系.

若$\{\varphi_n(x)\}$是完全系，则由 $\int_a^y f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(y)$可知，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)=\frac{1}{2},\quad \text{a. e. } x\in[a,b].$$

（注意，后面的级数是 L^1 意义下收敛的）

例 14 试证明下列命题：

(1) 设$\{f_n(x)\}$是 $L^2(E)$中标准正交系，$m(E)<+\infty$，且有 $|f_n(x)|\leqslant M$ $(n\in\mathbf{N},x\in E)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)/n$ 在 E 上几乎处处收敛.

(2) 设$\{f_n(x)\}$是 $L^2(E)$中的正交系，令 $\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)/n$ $(x\in E)$. 若 $I\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}\|f_n\|_2^2<+\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=0$，a. e. $x\in E$.

证明 (1) 因为$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)^2<+\infty$,所以存在 $f\in L^2(E)$,使得

$$\lim_{N\to\infty}\int_E|S_N(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x=0,\quad S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}f_n(x)/n,$$

$$\|S_{(N+1)^2}-S_{N^2}\|_2^2=\sum_{n=N^2+1}^{(N+1)^2}n^{-2}\leqslant\int_{N^2}^{(N+1)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\leqslant C_1N^{-2}.$$

令 $g_N(x)=\sum_{n=1}^{N}|S_{(n+1)^2}(x)-S_{n^2}(x)|$,则由 Minkowski 不等式可得

$$\lim_{N_1,N_2\to\infty}\|g_{N_1}-g_{N_2}\|_2\leqslant C_2\lim_{N_1,N_2\to\infty}|N_2^{-2}-N_1^{-2}|=0.$$

从而存在 $g\in L^2(E)$,使得$\|g_N-g\|_2\to0(N\to\infty)$,而且

$$g_N(x)\leqslant g_{N+1}(x),\quad \lim_{N\to\infty}g_N(x)=g(x),\quad \lim_{N\to\infty}S_{N^2}(x)=f(x).$$

对于 p: $N^2<p<(N+1)^2$,我们有

$$|S_p(x)-S_{N^2}(x)|\leqslant M^2\sum_{k=N^2+1}^{p}k^{-2}\leqslant M^2\frac{p-N^2}{N^2+1}\leqslant M^2\frac{2N+1}{N^2+1},$$

$$|f(x)-S_p(x)|\leqslant|f(x)-S_{N^2}(x)|+|S_{N^2}(x)-S_p(x)|.$$

由此易知结论成立.

(2) 令 $L_k=\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2}\|f_n\|_2^2(k=0,1,2,\cdots)$,则

$$I\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}k^{-3}\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2}\|f_n\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}L_kk^{-3}.$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\sigma_{k^2}\|_2^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k^{-4}\sum_{i=0}^{k}L_i\leqslant\sum_{i\geqslant0}L_i\sum_{k\geqslant i+1}k^{-4}$$

$$\leqslant2L_0+\sum_{i\geqslant1}i^{-3}L_i<+\infty.$$

这说明 $\lim_{k\to\infty}\sigma_{k^2}(x)=0$,a. e. $x\in E$.

现在假定 $n=k^2+p(k=[\sqrt{n}],0\leqslant p\leqslant2k)$,并令

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}f_n^2(x),$$

则 $F\in L^1(E)$. 我们有

$$G_k(x)=\sum_{n\geqslant k}n^{-3/2}f_n^2(x)\to0\quad(\text{a. e. }x\in E,k\to\infty),$$

$$|\sigma_n(x)| \leqslant |\sigma_n(x) - k^2\sigma_{k^2}(x)/n| + \sigma_{k^2}(x),$$

$$|\sigma_n(x) - k^2\sigma_{k^2}(x)/n| \leqslant \frac{1}{k^2}\left|\sum_{i=k^2+1}^{k^2+p} f_i(x)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2}\sum_{i=k^2+1}^{(k+1)^2} i^{3/4}|f_i(x)|/i^{3/4} \leqslant \frac{1}{k^2}\Big(\sum_{i=k^2+1}^{(k+1)^2} i^{3/2}\Big)^{1/2} G_k^{1/2}(x)$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2}(k+1)^{3/2}(2k+1)^{1/2}G_k^{1/2}(x) \to 0 \quad (k\to\infty, \text{a.e. } x\in E).$$

例 15 试证明下列命题：

(1) $\{\varphi_n\}\subset L^2([a,b])$是标准正交系，且有$|\varphi_n(x)|\leqslant M(n\in\mathbf{N})$. 若$f\in L^1([a,b])$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) 设$\{\varphi_k\}\subset L^2(E)$是标准正交系，且有$\Phi\in L^2(E)$，使得$|\varphi_k(x)|\leqslant|\Phi(x)|$, a.e. $x\in E$. 若$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$在$E$上是几乎处处收敛的，则$a_k\to 0\ (k\to\infty)$.

(3) 设$\{f_n\}\subset L^2(E)$是标准正交系，$\{a_n\}$是实数列，令$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kf_k(x)$. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,a_n^2<+\infty$，则

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|S-S_{n^2}\|_2^2<+\infty\Big(S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)\Big)$；

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)$在$E$上几乎处处收敛；

(iii) $\sup\limits_{n\geqslant1}|S_n(x)|$在$E$上平方可积.

(4) 设$\{\varphi_n\}$是$L^2([a,b])$中的完全标准正交系. 则对于$[a,b]$中任一正测度子集E，均有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E\varphi_n^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$.

(5) 设$\{\varphi_k(x)\}$是$L^2([a,b])$的完全系，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(x)=+\infty,\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

证明 (1) 易知对任给$\varepsilon>0$，存在$g\in L^2([a,b])$，使得$\|f-g\|_1<\varepsilon$. 而又存在N，使得$|\langle g,\varphi_n\rangle|<\varepsilon(n\geqslant N)$. 从而我们有

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-g(x)||\varphi_n(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)\varphi_n(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant M\|f-g\|_1 + \varepsilon < M\varepsilon + \varepsilon \quad (n \geqslant N).$$

由此即得所证.

(2) 反证法. 假定结论不真，则由题设知 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$, a. e. $x\in E$. 从而根据控制收敛定理，可得 $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_2=0$. 但这与 $\|\varphi_n\|_2=1$ 矛盾，证毕.

(3) (i) 因为 $\|S-S_{k^2}\|_2^2=\sum_{i=k^2+1}^{\infty}a_i^2$，所以我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|S-S_{k^2}\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k^2+1}^{\infty}a_i^2 \leqslant \sum_{i\geqslant k^2}\sqrt{i}\,a_i^2<+\infty.$$

(ii) 显然 $S_{k^2}(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $S(x)$. 令

$$n=k^2+p \quad (k=[\sqrt{n}\,], 0\leqslant p\leqslant 2k),$$

我们有

$$|S_n(x)-S_{k^2}(x)|^2=\left|\sum_{i=k^2+1}^{n}a_if_i(x)\right|^2 \leqslant p\sum_{i=k^2+1}^{n}a_i^2f_i^2(x)$$
$$\leqslant 2\sum_{i=k^2+1}^{\infty}\sqrt{i}\,a_i^2f_i^2(x) \triangleq 2R_k(x).$$

注意到 $\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{i}\,a_i^2f_i^2(x)$ 在 E 上几乎处处收敛，故知 $\lim_{k\to\infty}R_k(x)=0$, a. e. $x\in E$. 从而可得

$$|S_n(x)-S(x)| \leqslant |S_n(x)-S_{k^2}(x)| + |S(x)-S_{k^2}(x)|$$
$$\leqslant \sqrt{2R_k(x)} + |S(x)-S_{k^2}(x)|.$$

这说明 $\lim_{n\to\infty}|S_n(x)-S(x)|=0$, a. e. $x\in E$.

(iii) 令

$$F(x)=\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{i}\,a_i^2f_i^2(x)\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|S(x)-S_{k^2}(x)|^2\right)^{1/2},$$

则 $F\in L^2(E)$，且有 $|S_n(x)-S(x)|\leqslant F(x)$. 注意到

$$|S_n(x)|\leqslant|S(x)|+|S_n(x)-S(x)|\leqslant|S(x)|+F(x) \quad (x\in E),$$

以及 $|S(x)|+F(x)$ 在 E 上平方可积，即可得证.

(4) 考查 $f(x)=\chi_E(x)$，注意由 $\{\varphi_n(x)\}$ 的完全性可知

$$m(E)\ \|\chi_E\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\chi_E,\varphi_n\rangle|^2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_E\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|^2.$$

(5) 反证法. 假定 $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(x)<+\infty$，则存在 $E\subset[a,b]$：$m(E)>0$，以及 M，使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)<M(x\in E)$. 我们有

$$\int_E\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E\varphi_k^2(x)\mathrm{d}x<+\infty.$$

但是 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的完全系，因此对 $[a,b]$ 中任一正测集 e，可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_e\varphi_k^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_e\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right)^2\Big/m(e)=1.$$

这显然与 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_E\varphi_k^2(x)\mathrm{d}x<+\infty$ 矛盾.（实际上，取 N，使得 $\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_E\varphi_k^2(x)\mathrm{d}x<1/k$，然后再取 $\tilde{e}\subset[a,b]$，使得 $\sum_{k=1}^{N}\int_{\tilde{e}}\varphi_k^2(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{k}$. 从而可得 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\tilde{e}}\varphi_k^2(x)\mathrm{d}x<1$）

例 16 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in L^1([0,2\pi])$. 若其 Fourier 级数在正测集 $E\subset[0,2\pi)$ 上(点)收敛，则其 Fourier 系数必收敛于零.

(2) 函数系 $\{x^n\mathrm{e}^{-x^2/2}: n=0,1,2,\cdots\}$ 在 $L^2((-\infty,\infty))$ 中稠密.

证明 (1) 记 $a_0,a_n,b_n(n\in\mathbf{N})$ 是 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 系数，令 $r_n^2=a_n^2+b_n^2$，$a_n\cos nx+b_n\sin nx=r_n\cdot\cos(nx+\theta_n)$. 采用反证法：假定 $r_n\not\to 0(n\to\infty)$，则存在 $\sigma>0$ 以及 $\{n_k\}$：$r_{n_k}>\sigma(k\in\mathbf{N})$. 由此即知

$$\lim_{k\to\infty}\cos(n_kx+\theta_{n_k})=0\quad(x\in E).$$

注意到 $|\cos^2(n_kx+\theta_{n_k})|\leqslant1$，就有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\cos^2(n_kx+\theta_{n_k})\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to\infty}\cos^2(n_kx+\theta_{n_k})\mathrm{d}x=0.$$

另一方面，我们又有

$$\int_E \cos^2(nx+\theta_n)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m(E) + \cos 2\theta_n \int_E \cos 2nx\mathrm{d}x$$

$$- \sin 2\theta_n \int_E \sin 2nx\mathrm{d}x \to \frac{1}{2}m(E) \quad (n\to\infty).$$

这导致矛盾，证毕.

(2) 设 $f\in L^2(-\infty,+\infty)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)t^n \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t=0(n=0,1,2,\cdots)$，则令 $F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t$（$z$ 是复数），易知 $F^{(k)}(z)=0(k=1,2,\cdots)$，故 $F(z)\equiv 0$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t = 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}$（$y$ 是实数）乘上式两端，且在 $(-l,l)$ 上对 x 作积分，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\frac{\sin l(t-y)}{t-y}\mathrm{d}t = 0.$$

从而我们有 $f(t)=0$, a. e. $t\in(-\infty,\infty)$.

例 17 试证明下列命题：

(1) 设 $\{\varphi_k\}\subset L^2(E)$ 是完全标准正交系，则对 $f,g\in L^2(E)$ 有

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\langle g,\varphi_k\rangle.$$

(2) 设 $\{\varphi_k\}\subset L^2([a,b])$ 是完全标准正交系，$f\in L^2([a,b])$，$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$，其中 $c_k=\langle f,\varphi_k\rangle$，则对 $[a,b]$ 中的任一可测集 E，有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_E \varphi_k(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $f_n\in L^2(E)$，$m(E)<+\infty$，且存在 $M>0$，$\delta>0$，使得

$$\|f_n\|_2 \leqslant M, \quad \|f_n\|_1 \geqslant \delta \quad (n\in\mathbf{N}).$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nf_n(x)|<+\infty$, a. e. $x\in E$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$.

证明 (1) 注意：广义 Fourier 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k(x)$ 在 E 上依 L^2 意义收敛于 $f(x)$，从而可得

$$\langle f,g\rangle = \langle\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k,g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\langle\varphi_k,g\rangle.$$

(2) 注意，我们有等式

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x=\langle f,\chi_E\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\langle\chi_E,\varphi_k\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\langle\chi_E,\varphi_k\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 任给 $\varepsilon>0$，令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_nf_n(x)|$，对 $t>0$，又令 $E_t=\{x\in E:f(x)>t\}$，则存在 $t_0>0$，使得 $m(E_{t_0})<\varepsilon$. 由此知

$$\int_{E_{t_0}}|f_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{m(E_{t_0})}\cdot M\leqslant M\sqrt{\varepsilon}.$$

现在取 $\varepsilon_0>0$，使得 $M\sqrt{\varepsilon_0}<\delta/2$，我们有 $\int_{E\setminus E_{t_0}}|f_n(x)|\mathrm{d}x>\delta/2$. 从而得到

$$t_0m(E)\geqslant\int_{E\setminus E_{t_0}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\int_{E\setminus E_{t_0}}|f_n(x)|\mathrm{d}x>\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\delta/2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant 2t_0\cdot m(E)/\delta.$$

证毕.

例 18 试证明下列命题：

(1) 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的完全标准正交系. 若 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b[\varphi_n(x)-\psi_n(x)]^2\mathrm{d}x<1$ 的正交系，则 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的完全正交系.

(2) 设 $\{\varphi_i(x)\}$ 是 $L^2(A)$ 上完全标准正交系，$\{\psi_k(x)\}$ 是 $L^2(B)$ 中完全标准正交系，则 $\{f_{i,k}(x,y)\}=\{\varphi_i(x)\cdot\psi_k(y)\}$ 是 $L^2(A\times B)$ 上的完全系.

证明 (1) 设有 $f\in L^2([a,b])$ 满足 $\langle f,\psi_n\rangle=0(n\in\mathbf{N})$，则由

$$\langle f,\varphi_n\rangle=\langle f,\varphi_n-\psi_n\rangle+\langle f,\psi_n\rangle=\langle f,\varphi_n-\psi_n\rangle$$

可知，$|\langle f,\varphi_n\rangle|^2\leqslant\|f\|_2^2\,\|\varphi_n-\psi_n\|_2^2$. 从而得出

$$\|f\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f,\varphi_n\rangle|^2\leqslant\|f\|_2^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n-\psi_n\|_2^2<\|f\|_2^2.$$

这说明只能有 $f(x)=0$, a. e. $x\in[a,b]$.

(2) (i) $\int_{A\times B}f_{i,k}^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_A\varphi_i^2(x)\left(\int_B\psi_k^2(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=1$.

(ii) 在 $i_1\neq i_2(k_1\neq k_2)$时，我们有

$$\int_{A\times B}f_{i_1,k_1}(x,y)\cdot f_{i_2,k_2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_B\psi_{k_1}(y)\psi_{k_2}(y)\left(\int_A\varphi_{i_1}(x)\varphi_{i_2}(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=0.$$

(iii) 若有 $f\in L^2(A\times B)$，使得$\langle f,f_{i,k}\rangle=0(i,k\in\mathbf{N})$. 则令 $F_i(y)=\int_A f(x,y)\varphi_i(x)\mathrm{d}x$，易知 $F_i\in L^2(B)$. 从而有

$$\int_B F_i(y)\psi_k(y)\mathrm{d}y=\int_{A\times B}f(x,y)f_{i,k}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

这说明 $F_i(y)=0$, a. e. $y\in B$. 由此知$\int_A f(x,y)\varphi_i(x)\mathrm{d}x=0$, a. e. $y\in B$. 根据$\{\varphi_i(x)\}$的完全性，可知对几乎处处的 $y\in B$，我们有 $m(\{x\in A: f(x,y)\neq0\})=0$. 因此，由 Fubini 定理，得到

$$f(x,y)=0,\quad \text{a. e. }(x,y)\in A\times B.$$

例 19 下列命题成立(证略).

(1) Hermite 函数系 $H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}(n=0,1,2,\cdots)$是 $L^2((-\infty,\infty))$中的完全系.

(2) 设 $p(x),q(x)$是$[a,b]$上的连续函数，且 $g(x)>0(a\leqslant x\leqslant b)$. 若微分方程

$$y''+\{\lambda p(x)-q(x)\}y=0\quad(\lambda\in(-\infty,\infty))$$

具有满足边界条件 $y(a)=y(b)=0$ 的非零解 $y(x)$，则称此 λ 为该方程相应于所给边界条件的特征值，称 $y(x)$为相应于 λ 的特征函数. 现在假定 $y_1(x),y_2(x)$是相应于 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$的特征函数，则函数 $\varphi_1(x)=\sqrt{p(x)}\,y_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)=\sqrt{p(x)}\,y_2(x)$在$L^2([a,b])$中正交.

(3) 设 $-\infty\leqslant a<b<+\infty$，$f(x)$是$[a,b]$上几乎处处不为 0 的可测函数. 若 $|f(x)|\leqslant C\mathrm{e}^{-\delta|x|}(a\leqslant x\leqslant b,\delta>0)$，则$\{x^nf(x)\}(n=0,1,2,\cdots)$是 $L^2([a,b])$中的完全系.

§ 6.4 L^p 空间的范数公式

基本内容

定理 1 若 $f\in L^p(E)$ $(1\leqslant p<\infty)$，则存在 $g\in L^{p'}(E)$ 且 $\|g\|_{p'}=1$，使得

$$\|f\|_p=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2 若 $f\in L^\infty(E)$，则有 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{\|g\|_1=1}\left\{\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$.

定理 3 设 $g(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，若存在 $M>0$，使得对一切在 E 上可积的简单函数 $\varphi(x)$，都有

$$\left|\int_E g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\|\varphi\|_p,$$

则 $g\in L^{p'}(E)$（p' 是 p 的共轭指标）且 $\|g\|_{p'}\leqslant M$.

定理 4（广义 Minkowski 不等式） 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，若对几乎处处的 $y\in\mathbf{R}^n$，$f(x,y)$ 属于 $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty)$，且有

$$M\triangleq\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y<+\infty,$$

则

$$\left[\int_{\mathbf{R}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_{\mathbf{R}^n}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\mathrm{d}y.$$

注 1 在 $\mathbf{R}^1\times[0,2]$ 上作二元函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant y<1,\\ g(x), & 1\leqslant y\leqslant 2,\end{cases}$$

其中 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)$，$g\in L^p(\mathbf{R}^1)$，则对 $f(x,y)$ 的广义 Minkowski 不等式化为通常的 Minkowski 不等式：

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

注 2 在 $(0,\infty)\times[1,2]$ 上定义二元函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}a_n, & n\leqslant x<n+1,\ 0\leqslant y<1,\\ b_n, & n\leqslant x<n+1,\ 1\leqslant y\leqslant 2,\end{cases}\quad(n\in\mathbf{N})$$

则广义 Minkowski 不等式化为

$$\left(\sum_{n=1}^\infty|a_n+b_n|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{n=1}^\infty|a_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^\infty|b_n|^p\right)^{1/p}.$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可测. 若对任意的 $g\in L^q(\mathbf{R}^1)(1<q\leqslant+\infty)$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x<+\infty,$$

则 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)(1/p+1/q=1)$.

(2) 设在 $L^2(E)$中有 f_k 弱收敛于 f,则$\|f_k\|_2\leqslant M(k=1,2,\cdots)$.

(3) 设 $f_n\in L^p(E),g\in L^{p'}(E)(1/p+1/p'=1)$,而且

$$F_n(g)\triangleq\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x,\quad |F_n(g)|\leqslant M\quad(n\in\mathbf{N}),$$

则$\|f_n\|_p\leqslant M\quad(n\in\mathbf{N})$.

证明 (1) 反证法. 假定$\|f\|_p=+\infty$,则存在$\{g_n(x)\}$: $\|g_n\|_q=1$, 使得 $\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)g_n(x)|\mathrm{d}x>n^3(n\in\mathbf{N})$. 现在作函数

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|/n^2,\quad S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}|g_n(x)|/n^2,$$

我们有$\|S_n\|_q\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$. 而$\{\|S_n\|_q\}$递增并趋于$\|g\|_q$,因此推出$\|g\|_q\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2<+\infty$,即 $g\in L^q(\mathbf{R}^1)$. 但是又有

$$\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n^2}\int_{\mathbf{R}^1}|f(x)g_n(x)|\mathrm{d}x>n\quad(n\in\mathbf{N}),$$

这与题设矛盾.

(2) 由题设知,对任意 $g\in L^2(E)$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\|f\|_2\cdot\|g\|_2,$$

故存在 $M>0$,使得

$$\left|\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\|g\|_2\quad(g\in L^2(E)).$$

从而易知$\|f_n\|_2\leqslant M$.

(3) 反证法. 假定结论不真,则选 $n_1\in\mathbf{N}$,使得$\|f_{n_1}\|_p>1$. 此时取 $g_1(x)$: $\|g_1\|_{p'}=4^{-1}$,并记 $M_1=\sup\limits_{n\geqslant1}|F_n(g_1)|$;再选 $n_2\in\mathbf{N}$,使得$\|f_{n_2}\|_p>3\cdot4^2(M_1+2)$. 此时取 $g_2(x)$: $\|g_2\|_{p'}=4^{-2}$,使得 $|F_{n_2}(g_2)|>$

$\frac{2}{3}\|f_{n_2}\|_p\,\|g_2\|_{p'}$.（注 意，$\|f_{n_2}\|_p = \sup\limits_{\|g\|_{p'}\leqslant 1}\left|\int_E f_{n_2}(x)g(x)\mathrm{d}x\right| = \sup\limits_{\|g\|_{p'}\leqslant 1}|F_{n_2}(g)|$）. 从而有$|F_{n_2}(g_2)|>2(M_1+2)$. 这样继续做下去，…，可得$\{g_i(x)\}$：

$$\left\|\sum_{i=k+1}^{\infty} g_i\right\|_{p'} \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty}\|g_i\|_{p'} \leqslant \frac{1}{3}\|g_k\|_{p'},$$

$$\left|F_{n_k}\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty} g_i\Big)\right| \leqslant \|f_{n_k}\|_p \cdot \frac{1}{3}\|g_k\|_{p'}.$$

而且还有

$$|F_{n_k}(g_{k+1}+g_{k+2}+\cdots)| \leqslant \frac{1}{2}|F_{n_k}(g_k)|.$$

令 $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$，可得

$$\begin{aligned}
|F_{n_k}(g)| &= |F_{n_k}(g_1+\cdots+g_{k-1}) + F_{n_k}(g_k) + F_{n_k}(g_{k+1}+\cdots)| \\
&\geqslant |F_{n_k}(g_k)| - |F_{n_k}(g_{k+1}+\cdots)| - |F_{n_k}(g_1+\cdots+g_{k-1})| \\
&> (M_{k-1}+k) - M_{k-1} = k.
\end{aligned}$$

这导致矛盾.

例 2 试证明下列不等式：

(1)（Hardy 不等式） 设 $1<p<\infty, f\in L^p((0,\infty))$. 若记

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x>0,$$

则 $F\in L^p((0,\infty))$，且 $\|F\|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_p$.

(2) 设 $g\in L^2([0,1])$，且$\|g\|_2\neq 0$，令 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\,(0\leqslant x\leqslant 1)$，则 $\|G\|_2\leqslant \|g\|_2/\sqrt{2}$.

证明 (1) 因为我们有

$$F(x) = \int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t,$$

所以根据广义 Minkowski 不等式，可得

$$\|F\|_p = \left(\int_0^{+\infty}\left|\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} |f(xt)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} |f(y)|^p t^{-1} \mathrm{d}y \right)^{1/p} \mathrm{d}t$$

$$= \| f \|_p \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} \mathrm{d}t = \frac{p}{p-1} \| f \|_p .$$

（注意，当 $p=1$ 时，$F \overline{\in} L^1$.）

(2) 因为我们有

$$\|G\|_2^2 = \int_0^1 \left(\int_0^x g(t) \mathrm{d}t \right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |g(t)|^2 \mathrm{d}t \cdot x \right) \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_0^1 x \mathrm{d}x \cdot \|g\|_2^2 = \frac{1}{2} \|g\|_2^2,$$

所以 $\|G\|_2 \leqslant \|g\|_2 / \sqrt{2}$.

§6.5 卷　　积

基 本 内 容

定理 1（**Young 不等式**） 设 $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$，$g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1<p<\infty)$，则 $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

定义 设 $K(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，$\varepsilon>0$，令

$$K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K\left(\frac{x}{\varepsilon} \right) = \varepsilon^{-n} K\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \cdots, \frac{x_n}{\varepsilon} \right),$$

我们称 $K_\varepsilon(x)$ 为 $K(x)$ 的**展缩函数**. 例如 $K(x) = \chi_{B(0,1)}(x)$，则

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-n}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

我们有下列简单事实：设 $K \in L^1(\mathbf{R}^n)$，则

(i) $\int_{\mathbf{R}^n} K_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} K(x) \mathrm{d}x$；

(ii) 对于固定的 $\delta>0$，有 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)| \mathrm{d}x = 0$.

定理 2 设 $K \in L^1(\mathbf{R}^n)$ 且 $\|\mathbf{K}\|_1 = 1$，若 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant p < \infty)$，则有

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|K_\varepsilon * f - f\|_p = 0$. （也称这样的展缩族 $\{K_\varepsilon\}$ 为逼近恒等族.）

现在，我们特别令 $K(x) = \rho(x)$：

$$\rho(x) = \begin{cases} c\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2} \right), & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

其中 c 是使 $\|\rho\|_1=1$ 之常数. 易证当 $f(x)$ 是具有紧支集 F 且属于 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 的函数时, $(\rho_\varepsilon * f)(x)$ 也具有紧支集. 这是因为在等式

$$(\rho_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-\varepsilon t)\rho(t)\mathrm{d}t = \int_{|t|\leqslant 1} f(x-\varepsilon t)\rho(t)\mathrm{d}t$$

之中, 当 $f(x)$ 的紧支集 F 与闭球 $\overline{B}(x;\varepsilon)$ 不相交时, 则由于 $|t|<1$, 故 $f(x-\varepsilon t)\rho(t)=0$, 即 $(\rho_\varepsilon * f)(x)=0$, 所以, $(\rho_\varepsilon * f)(x)$ 的支集是 F 的 ε-邻域(指 $\{x: d(x,F)<\varepsilon\}$). 这就是说它具有紧支集.

定理 3 具有紧支集且无限次可微的函数类 $C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中稠密.

定理 4(Urysohn) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是紧集, G 是开集包含 F, 则存在 $f\in C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$f(x)=1,\ x\in F;\quad \mathrm{supp}(f)\subset G;\quad 0\leqslant f(x)\leqslant 1,\ x\in\mathbf{R}^n.$$

推论 设 $p>1, \varepsilon>0, M>0, k_0\in\mathbf{N}$, 则存在 $\varphi\in C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$, $\mathrm{supp}\varphi\subset\mathbf{R}^n\setminus B(0,k_0)$, 且有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=1,\ \|\varphi\|_p<\varepsilon,\ 0\leqslant\varphi(x)\leqslant M,\ x\in\mathbf{R}^n.$$

典型例题精解

例 1 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^p([0,b])(1<p<+\infty)$, 令

$$I_\alpha(x)=\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t\quad (0\leqslant x\leqslant b,\alpha>0),$$

则 $I_\alpha\in L^p([0,b])$, 且 $I_\alpha\in C([0,b])(\alpha>1/p)$.

(2) 设 $f\in L^1(\mathbf{R}^1)$, 令

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\frac{|\sin(1/y)|}{\sqrt{|y|}}\mathrm{d}y\quad (x\in\mathbf{R}^1),$$

则 $F\in L^p(\mathbf{R}^1)(2/3<p<2)$.

证明 (1) 令 $f(x)=0(x\overline{\in}[0,b])$, $g(x)=x^{\alpha-1}(0\leqslant x\leqslant b)$ 且 $g(x)=0(x\overline{\in}[0,b])$, 我们有

$$I_\alpha(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)\mathrm{d}t\quad (0\leqslant x\leqslant b).$$

由此知 $I_\alpha\in L^p([0,b])(\alpha>0)$. 易知当 $g\in L^{p'}([0,b])$ 时, $I_\alpha\in C([0,b])$, 故在 $(\alpha-1)p'>-1$ 即 $\alpha>1/p$ 时 $I_\alpha\in C([0,b])$.

(2) 易知 $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p(g\in L^p(\mathbf{R}^1)$, 故若视

$$g(y)=\begin{cases}|\sin(1/y)|/\sqrt{|y|}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

则当 $g\in L^p(\mathbf{R}^1)$时，就有 $f*g\in L^p(\mathbf{R}^1)$. 因为

$$\|g\|_p^p=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\sin z|^p}{|z|^p}|z|^{\frac{3p}{2}-2}\mathrm{d}z$$

$$=\left\{\int_{|x|\leqslant 1}+\int_{|x|>1}\right\}\frac{|\sin z|^p}{|z|^p}|z|^{\frac{3p}{2}-2}\mathrm{d}z\triangleq \mathrm{I}+\mathrm{II},$$

而当 $p>2/3$ 时，$|I|<+\infty$；当 $p<2$ 时，$|\mathrm{II}|<+\infty$，所以结论得证.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 $\varepsilon>0, K_\varepsilon(x)=C_\varepsilon \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}(x\in\mathbf{R}^1)$：$\|K_\varepsilon\|_1=1$，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|K_\varepsilon * f-f\|_1=0\quad(f\in L^1(\mathbf{R}^1)).$$

(2) 设 $f(x)$是$[0,\infty)$上的非负递减函数，且有 $f\in L^p([0,\infty))$ $(1<p<+\infty)$，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{+\infty}|f_\varepsilon(x)\chi_{(\eta,\infty)}(x)|^{p'}\mathrm{d}x=0\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\eta>0\right),$$

其中 $f_\varepsilon(x)$是 $f(x)$的展缩函数.

(3) 设 $f\in C([-\pi,\pi])$，则

$$\lim_{N\to\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_p=0\quad(1\leqslant p\leqslant+\infty),$$

其中 $\sigma_N(f)=\sigma_N(f,x)\triangleq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_N(x-t)\mathrm{d}t$是 Féjer 核，

$$K_N(x)=\frac{1}{2(N+1)}\,\frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x}.$$

证明 (1) 易知 $C_\varepsilon=1/\sqrt{\pi\varepsilon}$，我们有

$$\int_{\mathbf{R}^1}\left|\int_{\mathbf{R}^1}[f(x-y)K_\varepsilon(y)-f(x)K_\varepsilon(y)]\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^1}\left(\int_{\mathbf{R}^1}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)K_\varepsilon(y)\mathrm{d}y$$

$$=\left\{\int_{|x|\leqslant a}+\int_{|x|>a}\right\}\left(\int_{\mathbf{R}^1}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right)K_\varepsilon(y)\mathrm{d}y$$

$$\triangleq \mathrm{I}+\mathrm{II}\quad(a>0).$$

对任给 $\eta>0$，注意到$\|f_{(-y)}-f\|_1\to 0\,(y\to 0)$，故当 a 充分小时有 $|\mathrm{I}|<\eta$. 又由 $K_\varepsilon(x)(|x|>a)$是随 ε 递减趋于 0 而递减趋于 0 的，且

$$\int_{\mathbf{R}^1}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2\|f\|_1,$$

故根据控制收敛定理，可得当 ε 充分小时 $|\mathrm{II}|<\eta$.

(2) (i) 由 $xf(x)/2\leqslant\int_{x/2}^{x}f(t)\mathrm{d}t\to 0(x\to+\infty)$ 可知，

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0.$$

(ii) 我们有不等式 $(\varepsilon<\eta)$

$$\int_0^{+\infty}|f_\varepsilon(x)\chi_{[\eta,\infty)}(x)|^{p'}\mathrm{d}x=\int_\eta^{+\infty}f_\varepsilon^{p'}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_\eta^{+\infty}f_\varepsilon(x)\cdot f_\varepsilon^{p'-1}(x)\mathrm{d}x\leqslant[\varepsilon^{-1}f(\eta/\varepsilon)]^{p'-1}\cdot\int_\eta^{+\infty}f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x$$

$$=\eta^{1-p'}\left[\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)f\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\right]^{p'-1}\cdot\int_\eta^{+\infty}f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x\to 0\quad(\varepsilon\to 0),$$

由此即得所证.

(3) 因为 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\mathrm{d}t=1$，所以对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\|\sigma_N(f)-f\|_p=\left\|\frac{1}{2(N+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(N+1)t}{1-\cos t}\cdot[f(\cdot-t)-f]\mathrm{d}t\right\|_p$$

$$\leqslant\frac{1}{2(N+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(N+1)t}{1-\cos t}\|f(\cdot-t)-f\|_p\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{1}{2(N+1)\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-\cos(N+1)t}{1-\cos t}\|f(\cdot-t)-f\|_p\mathrm{d}t$$

$$+\frac{\|f\|_p}{(N+1)\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_\delta^\pi\right\}\frac{1-\cos(N+1)t}{1-\cos t}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\varepsilon+\frac{\|f\|_p}{(N+1)\pi}\frac{4\pi}{1-\cos\delta}$$

从而令 $N\to+\infty$，再令 $\varepsilon\to 0$，即可得证.

例 3 试证明下列命题：

(1) 设 $1<p<\infty$，则 $E=\left\{f\in C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^n):\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{d}x=0\right\}$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中稠密.

(2) 设 $f\in L^\infty(\mathbf{R}^1)$，记 $f_t(x)=f(x-t)$. 若 $\lim\limits_{t\to 0}\|f_t-f\|_\infty=0$，则存

在 $\mathbf{R}^1$ 上一致连续函数 $g(x)$,使得

$$f(x) = g(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^1.$$

(3) 设 $1\leqslant p\leqslant\infty, 1/p+1/p'=1, f\in L^p(\mathbf{R}^n), g\in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$,且令

$$F(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

则 $F\in C(\mathbf{R}^n)$.

(4) 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的可测函数,$D\subset\mathbf{R}^1$ 且 $\overline{D}=\mathbf{R}^1$. 若对任意的 $a\in D$,均有 $f(x+a)=f(x)$, a.e. $x\in\mathbf{R}^1$,则存在常数 C,使得 $f(x)=C$, a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

证明 (1) 以 $n=1$ 为例. 对任给 $\varepsilon>0$,已知存在 $g\in C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$,使得 $\| f-g \|_p<\varepsilon/2$.

若 $\int_{\mathbf{R}^1} g(x)\mathrm{d}x=0$,则结论成立;

若 $\int_{\mathbf{R}^1} g(x)\mathrm{d}x=A\neq 0$,则取 k_0,使得

$$\mathrm{supp} g \cap [k_0,\infty) = \varnothing.$$

从而取 $\varphi\in C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$,满足 $\mathrm{supp}\varphi\subset[k_0,\infty)$, $\varphi(x)\geqslant 0 (x\in\mathbf{R}^1)$,且有

$$\int_{\mathbf{R}^1} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \| \varphi \|_p < \frac{\varepsilon}{2|A|}.$$

现在考察 $\psi(x)=g(x)-A\varphi(x)$,易知 $\psi\in L^p(\mathbf{R}^n)$,且有

$$\begin{aligned} \| f-\psi \|_p &= \| f-g+A\varphi \|_p \\ &\leqslant \| f-g \|_p + |A| \, \| \varphi \|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

即得所证.

(2) 取 $\varphi_n(x)\triangleq\varphi_{\varepsilon_n}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$为非负逼近恒等族.

(i) $\| \varphi_n * f - f \|_\infty \leqslant \sup\limits_{|t|\leqslant\varepsilon_n} \| f_t - f \|_\infty$.

实际上,对 $\| \psi \|_1=1$,我们有

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{R}^1} [f*\varphi_n(x) - f(x)]\psi(x)\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \iint\limits_{\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1} |f(x-t)-f(x)| \, |\varphi_n(t)| \, |\psi(x)| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{|t|\leqslant\varepsilon_n} \varphi_n(t) \left(\int_{\mathbf{R}^1} |f_t(x)-f(x)| \, |\psi(x)| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{|t|\leqslant \varepsilon_n} \| f_t - f \|_\infty \cdot \int_{\mathbf{R}^1} \varphi_n(t) \left(\int_{\mathbf{R}^1} |\psi(x)| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

$$= \sup_{|t|\leqslant \varepsilon_n} \| f_t - f \|_\infty .$$

(ii) 由(i)以及题设可知

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n * f - f \|_\infty = 0.$$

注意到 $\varphi_n * f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上一致连续函数，以及 $\{(\varphi_n * f)(x)\}$ 是(对 x 一致)Cauchy 列，因此存在一致连续函数 $g(x)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n * f(x) = g(x).$$

由此即得 $f(x)=g(x)$，a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(3) 注意

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \|f(x+h-\cdot) - f(x-\cdot)\|_p \|g\|_{p'}.$$

(4) (i) $f(x)$ 是有界函数时，作单位恒等逼近列 $\{\varphi_k\}$ 且令 $f_k(x)=(\varphi_k * f)(x)$，则 $f_k\in C(\mathbf{R}^1)(k\in\mathbf{N})$ 且有

$$f_k(x+a) = f_k(x) \quad (k\in\mathbf{N}, a\in D).$$

由于 $\overline{D}=\mathbf{R}^1$，故知 $f_k(x)=C_k(k\in\mathbf{N})$. 因为 $\|f_k-f\|_1\to 0(k\to\infty)$，所以可取 $\{f_{k_n}(x)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = f(x),\ \text{a.e.}\ x\in\mathbf{R}^1, \quad \lim_{k\to\infty} C_k = C.$$

取 $f(x)=C$，a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(ii) 对一般的 $f(x)$，我们作函数

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)|\leqslant n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $f_n(x)$ 满足(i)中条件. 从而得 $f_n(x)=C_n$，a.e. $x\in\mathbf{R}^1$. 若对一切 $n\in\mathbf{N}$，均有 $C_n\neq 0$，则 $f(x)=C_n$，a.e. $x\in\mathbf{R}^1(n\in\mathbf{N})$. 否则就有 $f_n(x)=0$，即 $f(x)=0$，a.e. $x\in\mathbf{R}^1$.

例 4 试证明下列命题：

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m(E)>0$. 若对任意的 $x,y\in E$，均有 $(x+y)/2\in E$，则 E 包含一个非空开集.

(2) 设 $f\in L^1([0,1])$，$g\in L^1([0,1])$. 若对任意 $h\in C^{(\infty)}([0,1])$，均有

$$\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)h(x)\mathrm{d}x,$$

则 $f(x)=g(x)$, a. e. $x\in[0,1]$.

证明 (1) 不妨假定 $E_0=E\cap[-n_0,n_0]$: $0<m(E_0)<+\infty$,则 $\chi_{E_0}\in L^1(\mathbf{R}^1)$. 由此知 $f(x)=\int_{\mathbf{R}^1}\chi_{E_0}(2x-y)\chi_{E_0}(y)\mathrm{d}y$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数,且非负以及 $f(x)=0(x\overline{\in}(E_0+E_0)/2)$.

由于 $f(x/2)=(\chi_{E_0}*\chi_{E_0})(x)$,故若 $f(x)=0$,就有 $\hat{\chi}_E^2(x)=0$. 从而 $\|\chi_E\|_2^2=0$. 但我们有 $\|\chi_E\|_1>0$,因此 $f(x)$ 在某个开区间(含于 E_{n_0})上为正值. 证毕.

(2) 对$[0,1]$中任一子区间$[a,b]$,以及 $h(x)=\chi_{[a,b]}(x)$,存在 $h_n\in C^{(\infty)}([0,1])$,使得 $\int_0^1|h_n(x)-h(x)|\mathrm{d}x\to 0(n\to\infty)$. 由此即知

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

令 $b\to a$ 即得 $f(x)=g(x)$, a. e. $x\in[0,1]$.

例 5 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)$, $g\in L^q(\mathbf{R}^1)$, $1/p+1/q=1$,则

$$\lim_{|x|\to\infty}|(f*g)(x)| = 0.$$

(2) 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)(1\leqslant p<+\infty)$, $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 可测且满足

$$|\varphi(x)| \leqslant M/(1+|x|)^{n+\varepsilon} \quad (\varepsilon>0),$$

则当 x 是 $f(x)$ 的 Lebesgue 点时,有

$$\lim_{t\to 0}(f*\varphi_t)(x) = af(x) \quad \left(a=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x\right).$$

(3) 设 $f\in L^2(\mathbf{R}^1)$, $f_n\in L^2(\mathbf{R}^1)(n=1,2,\cdots)$, 且有 $\|f_n-f\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$. 若 $g\in L^1(\mathbf{R}^1)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n*g-f*g\|_2 = 0.$$

证明 (1) 易知存在 $f_k\in C_c(\mathbf{R}^1)$, $g_k\in C_c(\mathbf{R}^1)$,使得$(f_k*g_k)(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上一致收敛到$(f*g)(x)$. 从而对任给 $\varepsilon>0$,可取 $k_0\in\mathbf{N}$,使得

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^1}|(f_{k_0}*g_{k_0})(x)-(f*g)(x)| < \varepsilon.$$

选 $M>0$,使得$(f_{k_0}*g_{k_0})(x)=0(|x|>M)$. 我们有

$$|(f*g)(x)| \leqslant |(f_{k_0}*g_{k_0})(x)-(f*g)(x)| + |(f_{k_0}*g_{k_0})(x)|$$

$$\leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}^1} |(f_{k_0}*g_{k_0})(x)-(f*g)(x)| < \epsilon \quad (|x|>M).$$

(2) 由题设知，对任意的 $\delta>0$，存在 $\eta>0$，使得

$$\int_{|y|<r} |f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y \leqslant \delta\cdot r^n \quad (r\leqslant\eta).$$

令

$$I_1 \triangleq \int_{|y|\leqslant\eta} |f(x-y)-f(x)||\varphi_t(y)|\mathrm{d}y,$$

$$I_2 \triangleq \int_{|y|>\eta} |f(x-y)-f(x)||\varphi_t(y)|\mathrm{d}y,$$

因为 $|(f*\varphi_t)(x)-af(x)|\leqslant I_1+I_2$，所以只需指出 $|I_1|\leqslant A\delta$，$|I_2|\to 0$ $(t\to 0)$即可.

对 I_1：选 K 满足：$2^K\leqslant\eta/t<2^{K+1}(\eta/t\geqslant 1)$；$K=0(\eta/t<1)$，并令

$$E_k=\{y\in\mathbf{R}^n:\ 2^{-k-1}\eta<|y|\leqslant 2^{-k}\eta\},$$

则 $|\varphi_t(y)|\leqslant Ct^{-n}(2^{-k}\eta/t)^{-n-\epsilon}(y\in E_k)$，$|\varphi_t(y)|\leqslant Ct^{-n}(y\in B(0, 2^{-K}\eta))$. 从而可得

$$I_1\leqslant\sum_{k=0}^{K-1}Ct^{-n}\left(\frac{2^{-k}\eta}{t}\right)^{-n-\epsilon}\int_{2^{-k-1}\cdot\eta\leqslant|y|\leqslant 2^{-k}\eta}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y$$

$$+Ct^{-n}\int_{|y|>2^{-K}\eta}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y.$$

因此，由 $\eta/t\geqslant 2$ 可知

$$I_1\leqslant C\delta\sum_{k=0}^{K-1}t^{-n}\left(\frac{2^{-k\eta}}{t}\right)^{-n-\epsilon}(2^{-k}\eta)^n+C\delta t^{-n}(2^{-K}\eta)^n$$

$$=C\delta\left(\frac{\eta}{t}\right)^{-\epsilon}\sum_{k=0}^{K-1}2^{k\epsilon}+C\delta\left(\frac{2^{-K}\eta}{t}\right)^n$$

$$=C\delta\left(\frac{\eta}{t}\right)^{-\epsilon}\frac{2^{K\epsilon-1}}{2^\epsilon-1}+C\delta\left(\frac{2^{-K}\eta}{t}\right)^n$$

$$\leqslant C[(2^\epsilon-1)^{-1}+2^n]^\delta.$$

对 I_2：令 p' 为 p 的共轭指标，$e=\{y:\ |y|>\eta\}$，则

$$I_2\leqslant\int_{|y|>\eta}[|f(x-y)|+|f(x)|]|\varphi_t(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \|f\|_p \|\chi_e \cdot \varphi_t\|_{p'} + |f(x)| \|\chi_e \cdot \varphi_t\|_1.$$

从而只需指出 $\lim\limits_{t\to 0} \|\chi_e \cdot \varphi_t\|_q = 0(q=1, q=p')$.

若 $q=+\infty$. 我们有

$$\|\chi_e \cdot \varphi_t\|_\infty \leqslant Ct^{-n}(1+\eta/t)^{-n-\varepsilon} = Ct^\varepsilon(t+\eta)^{-n-\varepsilon} \leqslant C\eta^{-n-\varepsilon}t^\varepsilon.$$

若 $q<+\infty$. 我们有

$$\|\chi_e \cdot \varphi_t\|_q^q = \int_{|y|>\eta} t^{-nq}\left|\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right|^q \mathrm{d}y = t^{n(1-q)}\int_{|z|>\eta/t} |\varphi(z)|^q \mathrm{d}z$$

$$= C_1 t^{n(1-q)} \int_{\eta/t}^{+\infty} r^{n-1-(n+\varepsilon)q} \mathrm{d}r$$

$$= C_2 t^{n(1-q)} \left(\frac{\eta}{t}\right)^{n-(n+\varepsilon)q} = C_3 t^{\varepsilon q}.$$

无论是哪种情形，$\|\chi_e \varphi_t\|_q$ 均由 t^ε 所控制.

(3) 注意不等式

$$\|f_n * g - f * g\|_2$$

$$= \left(\int_{\mathbf{R}^1}\left|\int_{\mathbf{R}^1} g(t)[f_n(x-t) - f(x-t)]\mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^1}\left[\int_{\mathbf{R}^1} |g(t)|^2 |f_n(x-t) - f(x-t)|^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{\mathbf{R}^1} |g(t)|^2 \left(\int_{\mathbf{R}^1} |f_n(x-t) - f(x-t)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \mathrm{d}t.$$

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上局部可积，则下列两个结论等价：

(i) 存在常数 C，使得 $f(x)=C$，a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(ii) 对任一闭区间$[a,b]$，必有

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x = o(|h|) \quad (h\to 0).$$

(2) 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上局部可积，则下列两个结论等价：

(i) 存在 $g(x)$，它在任一闭区间$[a,b]$上均有界变差，使得

$$f(x) = g(x), \quad \text{a. e. } x\in\mathbf{R}^1.$$

(ii) 在任意的闭区间$[a,b]$上，均有

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x = O(|h|) \quad (h\to 0).$$

证明 (1) (ii)⇒(i). 作逼近恒等列$\{\varphi_n(x)\}$: $\varphi_n(x)=0(|x|>1/n)$,并记$f_n(x)=(f*\varphi_n)(x)$,又选$\delta>0$,使得$1/n<\delta/2$. 对任意的$x_0\in\mathbf{R}^1$,作区间$(x_0-\delta/2,x_0+\delta/2)$,我们有

$$\begin{aligned}&|f_n(x_0+h)-f_n(x_0)|\\&\quad\leqslant\int_{|y|\leqslant 1/n}|f(x_0+h-y-f(x_0-y)||\varphi_n(y)|\mathrm{d}y\\&\quad\leqslant\|\varphi_n\|_\infty\int_a^b|f(y+h)-f(y)|\mathrm{d}y=o(|h|)\quad(h\to 0).\end{aligned}$$

这说明$f_n(x)$在$x=x_0$处之导数为0,随之可知存在常数C_n: $f_n(x)=C_n$. 注意到$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,得到$\lim\limits_{n\to\infty}C_n=C=f(x)$,a. e. $x\in\mathbf{R}^1$.

(2) (i)⇒(ii). 假定$|f(x)|\leqslant M$,且$f(x)$递增,又设$0<h\leqslant 1$,则

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{b+h}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+h}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 2Mh.$$

(ii)⇒(i). 由题设知,存在$\delta>0$,使得

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M|h|\quad(|h|<\delta).$$

作$\varphi_k\in C^1(\mathbf{R}^1)$且支集包含于$[-\delta,\delta]$,又$\|\varphi_k\|_1=1$,以及$(m(\mathbf{Z})=0)$

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)\triangleq\lim_{k\to\infty}(f*\varphi_k)(x)=f(x)\quad(x\in\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Z}).$$

取$a,b\,\overline{\in}\,\mathbf{Z}$且$|h|<\delta$,我们有

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left|\frac{f_k(x+h)-f_k(x)}{h}\right|\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\frac{1}{|h|}\int_a^b\left(\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+h-y)-f(x-y)||\varphi_k(y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\frac{1}{|h|}\int_{-\delta}^{\delta}|\varphi_k(y)|\mathrm{d}y\int_{a-\delta}^{b+\delta}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M.\end{aligned}$$

从而可得

$$\bigvee_a^b(f_k)=\int_a^b|f_k'(x)|\mathrm{d}x\leqslant M,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}|f_k(x_{i+1})-f_k(x_i)|\leqslant M\quad(x_i\,\overline{\in}\,\mathbf{Z}).$$

令$k\to\infty$,即知$\sum\limits_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leqslant M$. 证毕.

例 7 试证明下列命题：

(1) 设 $f_k\in L^1(\mathbf{R}^n)(k\in\mathbf{N})$，$g\in L^1(\mathbf{R}^n)$，且 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$，则

$$|(f*g)(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|(f_k*g)(x)|.$$

(2) 设 $1\leqslant p<+\infty$. 我们有

(i) 若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，则 $\|f\|_p=\sup\{\|f*h\|_p:\ \|h\|_1=1\}$.

(ii) 若 $\sup\{\||f|*h\|_p:\ \|h\|_1=1\}<+\infty$，则 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，且有

$$\|f\|_p=\sup\{\||f|*h\|_p:\ \|h\|=1\}.$$

证明 (1) 由题设易知

$$\lim_{N\to\infty}\|R_N(x)\|_1=0\quad\Big(R_N(x)=\sum_{k=N+1}^{\infty}f_k(x)\Big).$$

从而可得 $\lim\limits_{N\to\infty}\|R_N*g\|\leqslant\lim\limits_{N\to\infty}\|R_N\|_1\cdot\|g\|_1=0$. 由此又知存在 $\{N_m\}$，使得

$$\lim_{m\to\infty}(R_{N_m}*g)(x)=0,\quad \text{a. e. } x\in\mathbf{R}^n.$$

因此，我们有

$$|(f*g)(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{N_m}|(f_k*g)(x)|+|(R_{N_m}*g)(x)|,$$

而令 $m\to\infty$ 即得所证.

(2) (i) 取 $h(x)=a_0\mathrm{e}^{-t^2}$ 满足 $\|h\|_1=1$，我们有

$$\|f\|_p=\lim_{\varepsilon\to0}\|h_\varepsilon*f\|_p\leqslant\sup\{\|h_\varepsilon*f\|_p:\ \varepsilon>0\}$$

$$\leqslant\sup\{\|f*h\|_p:\ \|h\|_1=1\}.$$

(ii) 令 $L=\sup\{\||f|*h\|_p:\ \|h\|_1=1\}$，易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上局部可积（取 $h(x)=\chi_E(x)$，$m(E)<+\infty$）. 由 (i) 知

$$\|\chi_E\cdot f\|_p\leqslant\sup\{\||f|*h\|_p:\ \|h\|_1=1\}=L.$$

由此易知 $\|f\|_p\leqslant L$. 反向用 Young 不等式.

例 8 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的一致连续且有界的函数，$K_n\in L^1(\mathbf{R}^1)(n\in\mathbf{N})$，且有

(i) $\|K_n\|_1\leqslant M(n\in\mathbf{N})$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^1}K_n(x)\mathrm{d}x=1$；

(iii) 对任意的 $\delta>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{|x|>\delta}|K_n(x)|\mathrm{d}x=0$，

则 $(K_n*f)(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(2) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的可测函数，而且 $(f*f)(x)$ 几乎处处有定义，记

$$f_1^*(x)=f(x),\quad f_n^*(x)=(f_{n-1}^**f)(x)\quad(n=2,3,\cdots);$$

则称 $f_n^*(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次迭次卷积.

若 $f\in L^p(\mathbf{R}^1)$，$1\leqslant p<\infty$，并令

$$1-\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{p};\quad \frac{1}{p_k}=1-\frac{k}{p'}\quad (k=1,2,\cdots,n),$$

则 $\|f_k^*\|_{p_k}\leqslant\|f\|_p^k\quad (k=1,2,\cdots,n;\ 1/p+1/p'=1)$.

证明 (1) 假定 $|f(x)|\leqslant M_1(M_1>M, x\in\mathbf{R}^1)$. 由题设知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1，使得

$$\left|\int_{\mathbf{R}^1}K_n(x)\mathrm{d}x-1\right|<\frac{\varepsilon}{2M_1},\quad n>N_1.$$

从而有

$$\left|\int_{\mathbf{R}^1}K_n(x)f(x)\mathrm{d}x-f(x)\right|<M_1\frac{\varepsilon}{2M_1}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta>0$ 使得

$$|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon/4M_1\quad (x\in\mathbf{R}^1, |y|<\delta).$$

又取 N_2，使得

$$\int_{|y|>\delta}|K_n(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8M_1}\quad (n>N_2).$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&\left|(K_n*f)(x)-\int_{\mathbf{R}^1}K_n(y)f(x)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}^1}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y\\&=\int_{|y|>\delta}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{|y|\leqslant\delta}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y\\&\leqslant 2M_1\int_{|y|>\delta}|K_n(y)|\mathrm{d}y+\int_{|y|\leqslant\delta}|K_n(y)|\mathrm{d}y\cdot\frac{\varepsilon}{4M_1}\\&\leqslant 2M_1\cdot\frac{\varepsilon}{8M_1}+\|K_n\|_1\cdot\frac{\varepsilon}{4M_1}\\&<\frac{\varepsilon}{4}+M_1\frac{\varepsilon}{4M_1}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

令 $N=\max(N_1,N_2)$，则可得

$$\begin{aligned}|(K_n*f)(x)-f(x)|\leqslant&\left|(K_n*f)(x)-\int_{\mathbf{R}^1}K_n(y)f(x)\mathrm{d}y\right|\\&+\left|\int_{\mathbf{R}^1}K_n(y)f(x)\mathrm{d}y-f(x)\right|\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad (x\in\mathbf{R}^1, n>N).$$

(2) 根据 Young 不等式,再用归纳法.显然,我们有

$$\|f^{(2)}\|_{p_2}\leqslant\|f\|_p^2 \quad \left(\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-1>0\right).$$

设 $f^{(r)}\in L^{p_r}(\mathbf{R}^1)$,又由 Young 不等式可知

$$f^{(r+1)}(x)=(f^{(r)}*f)(x),$$

$$f^{(r+1)}\in L^{p_{r+1}} \quad \left(\frac{1}{p_{r+1}}=\frac{1}{p_r}+\frac{1}{p}-1\right),$$

$$\|f^{(r+1)}\|_{p_{r+1}}\leqslant\|f^{(r)}\|_{p_r}\|f\|_p.$$

由此即可得证.